17 Apéndice 1: Gráficas y análisis de datos

Representación gráfica de datos

Existen muchas cantidades que se pueden medir en un experimento físico. Por lo general, todas ellas excepto dos son **controladas**, de manera que no cambian durante el transcurso del experimento. A continuación, se varía o se cambia deliberadamente una de las cantidades (denominada **variable independiente**) y se investiga el efecto sobre otra de las cantidades (denominada **variable dependiente**).

La mejor manera de analizar los resultados de este tipo de experimentos suele ser mediante el **trazado** (dibujo) de una gráfica. La observación de una gráfica es una buena manera de identificar un patrón, o tendencia, en un conjunto de datos numéricos. Las gráficas también pueden proporcionar información adicional: los **gradientes** (pendientes), los **cortes con los ejes** y las **áreas bajo las curvas** normalmente tienen importantes significados. En la Figura 17.1 se ilustra la terminología asociada a las gráficas.

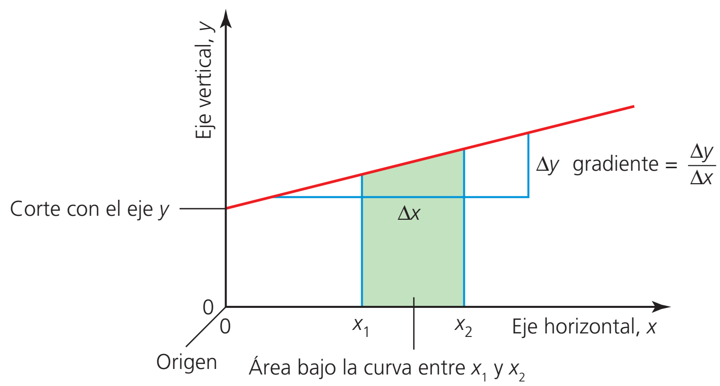


Figura 17.1 *Terminología asociada a las gráficas*

Trazado de gráficas

El trazado de gráficas de buena calidad es una importante herramienta en física. Cuando trazamos una gráfica, debemos recordar los puntos siguientes.

- Cuanto mayor es el tamaño de la gráfica, mayor es la precisión con la que se pueden dibujar los puntos. Una regla simple es que la gráfica debería ocupar al menos la mitad del espacio disponible (en cada dirección).
- Cada **eje** se debe rotular con la cantidad y la unidad utilizadas (p.ej. fuerza/N, velocidad/ms^{-1}). Las listas de resultados de las tablas se deben rotular de forma análoga. Por ejemplo, si quieres registrar una masa de 5 g como el número cinco sobre los ejes de una gráfica, al rotular los ejes como masa/g estás indicando que has dividido los 5 g de g en g hasta obtener cinco.
- La *variable independiente* se suele representar en el eje horizontal y la *variable dependiente* en el eje vertical. En ocasiones, la elección de qué se representa en cada eje viene determinada de forma que el gradiente de la gráfica tenga un significado específico. Si una de las variables es el tiempo, casi siempre se representa en el eje horizontal.
- Se deben escoger las **escalas** de manera que resulte fácil dibujar los puntos e interpretar la gráfica. Por ejemplo, para representar 10 o 20 se pueden usar cinco divisiones, pero no tiene sentido usar 7 o 12.
- Por lo general, ambas escalas deberían comenzar en cero, de manera que el punto (0, 0), el **origen**, esté incluido en la gráfica. Esto suele ser importante cuando interpretamos la gráfica, aunque no siempre es razonable, especialmente si ello comporta que todas las lecturas se restringen a una pequeña zona de la gráfica. Las escalas de temperatura en °C generalmente no es necesario que comiencen en cero.
- Los **puntos** correspondientes a los datos deben ser claros y de pequeño tamaño. Cuando se usan puntos (en lugar de cruces) es útil encerrarlos en un círculo para asegurarnos de que no los pasaremos por alto, en especial si los atraviesa una curva.

- Cuantos más puntos representemos, más preciso será el dibujo de la curva que representa la relación entre ellos. Normalmente se necesitan seis puntos *como mínimo*, aunque en ocasiones esto no es posible.
- Una vez representados todos los puntos, aparece claramente un patrón y se puede dibujar la **recta (o la curva) de ajuste** (véase la Figura 17.2 para dos ejemplos correctos y un ejemplo erróneo; en los tres casos los puntos se representan mediante barras de error). Estas rectas (o curvas) se denominan *rectas (o curvas) de tendencia*. Son rectas cuando se dibujan con una regla, en cuyo caso se habla de tendencia **lineal**. En todo caso, la línea dibujada debe ser suave y fina; las líneas gruesas que intentan pasar por todos o casi todos los puntos indican que la persona que las dibuja no entiende que los puntos no pueden estar perfectamente colocados y que hay una incertidumbre asociada a todas las medidas. Habitualmente quedan tantos puntos por encima de la recta (o curva) de ajuste como por debajo de esta. Los puntos sobre una gráfica nunca se deben unir mediante una serie de rectas.
- El trazado de gráficas a mano es una técnica que todos los estudiantes deberían practicar. No obstante, saber usar un programa de ordenador para dibujar gráficas es también una técnica muy valiosa que permite ahorrar mucho tiempo (especialmente en los trabajos de investigación). Una gráfica generada por ordenador (o por una calculadora con pantalla gráfica) debe ser juzgada con los mismos parámetros que una gráfica representada a mano y en ocasiones las rectas (o curvas) de ajuste no están bien situadas.

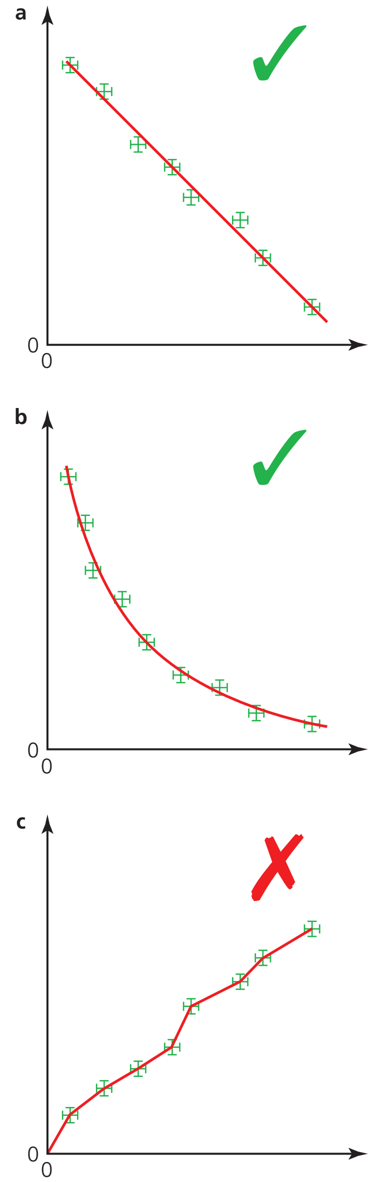


Figura 17.2 *Maneras correctas y manera errónea de dibujar rectas (o curvas) de ajuste*

Extrapolación e interpolación

Una línea (o una curva) de ajuste se dibuja normalmente para cubrir un intervalo específico de medidas registradas en un experimento, como se muestra en la Figura 17.3. Si deseamos predecir otros valores *en el interior* de ese intervalo, lo podemos hacer con confianza. El diagrama indica cómo se puede determinar un valor de *y* para un valor escogido de *x*. A este proceso se le denomina **interpolación**.

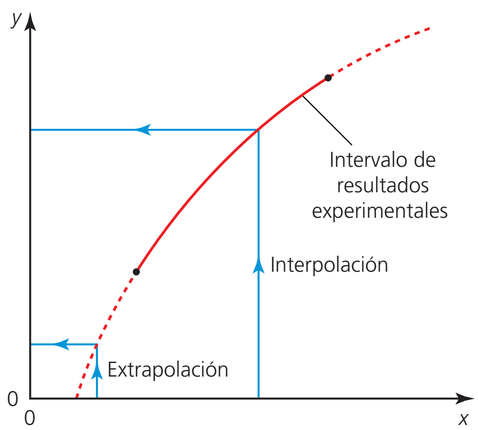


Figura 17.3 *Interpolación y extrapolación para encontrar el corte con el eje y*

Si deseamos predecir lo que sucedería *fuera* del intervalo de medida (**extrapolación**) necesitamos ampliar la recta (o la curva) de ajuste. Las líneas se suelen extrapolar para ver si pasan por el origen o para encontrar el punto de corte con los ejes, tal como se representa en la Figura 17.3.

Las predicciones realizadas mediante extrapolación se deben considerar con cuidado, porque es posible que sea incorrecto asumir que el comportamiento observado en el intervalo de medida se pueda aplicar asimismo fuera de ese intervalo.

Proporcionalidad

La relación más simple posible entre dos variables es la **proporcionalidad** entre una y la otra (a veces denominada proporcionalidad *directa*). Esto significa que si una de las variables, pongamos la *x*, duplica su valor, la otra variable, *y*, también duplica su valor; si *y* se divide entre cinco, entonces *x* se divide entre cinco; si *x* se multiplica por 17, entonces *y* se multiplica por 17, etc. En otras palabras, el cociente entre las dos variables (*x*/*y* o *y*/*x*) es constante. La proporcionalidad se representa mediante:

$$y \propto x$$

El objetivo de muchos experimentos fundamentales es estudiar si existe una relación de proporcionalidad entre dos variables, y la mejor manera de comprobarlo es mediante una representación gráfica.

Si dos variables son (directamente) proporcionales, su gráfica es una **línea recta que pasa por el origen** (Figura 17.4). Es importante recordar que una gráfica lineal que no pasa por el origen *no puede* representar una proporcionalidad (Figura 17.5).

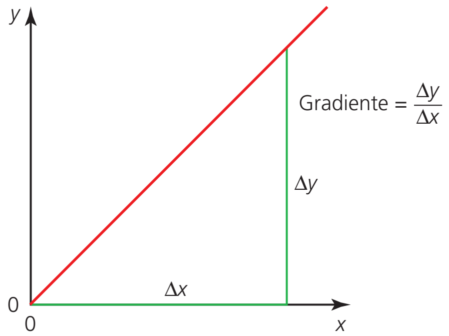


Figura 17.4 *Relación de proporcionalidad*

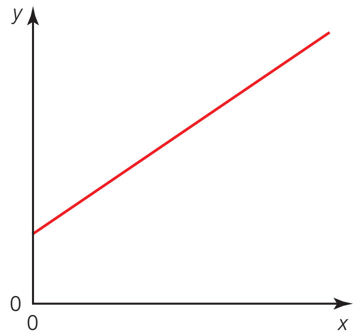


Figura 17.5 *Una relación lineal que no es proporcional no pasa por el origen*

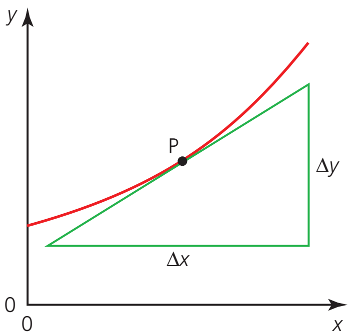


Figura 17.6 *Método para encontrar el gradiente de una curva en un punto P mediante la tangente*

Gradiente de una recta (o de una curva)

El gradiente de una recta (o una curva) se designa con el símbolo m y se calcula dividiendo la variación de y, Δy, entre la variación correspondiente de x, Δx, tal como se muestra en la Figura 17.4. (El signo delta, Δ, se utiliza para representar una variación de una cantidad).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es importante destacar que para la determinación del gradiente de una recta (o de una curva) se debe usar un triángulo *grande*, ya que el porcentaje de incertidumbre es menor cuando se utilizan valores grandes.

Los gradientes de muchas rectas (o curvas) tienen significado físico: por ejemplo, el gradiente de una gráfica masa-volumen equivale a la densidad del material.

El gradiente de una curva, como la que se muestra en la Figura 17.6, varía constantemente. El gradiente de la curva en un punto cualquiera, P, se puede determinar a partir del dibujo de la recta **tangente** a la curva en ese punto. (En matemáticas, si se conoce la ecuación de la curva, el gradiente en cada punto se puede determinar mediante un proceso denominado *diferenciación*).

Ejemplos resueltos

1 En la Figura 17.7 se muestra la recta de ajuste para los datos de un experimento en el que se han medido las masas y los volúmenes de distintas piezas fabricadas con la misma aleación metálica.

- **a** Calcula el valor experimental de la densidad de la aleación, que es igual al gradiente de la recta.
- **b** Sugiere por qué la gráfica no pasa por el origen.
- **c** Explica por qué el método del uso del gradiente para determinar la densidad es mucho mejor que el simple cálculo de un valor a partir de un par de lecturas de la masa y el volumen.

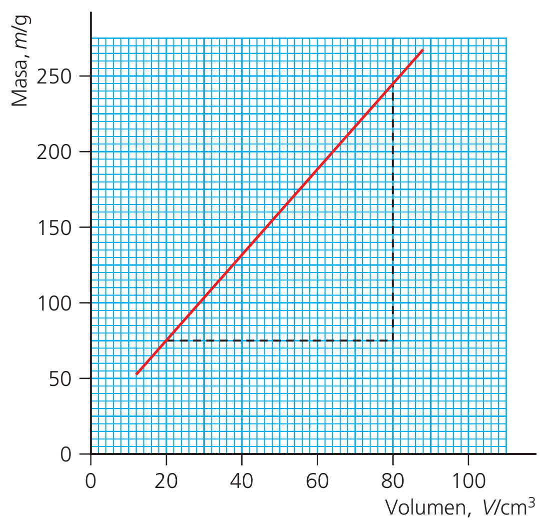


Figura 17.7 *Representación gráfica de la masa* m *en función del volumen* V *de las distintas piezas de una aleación metálica.*

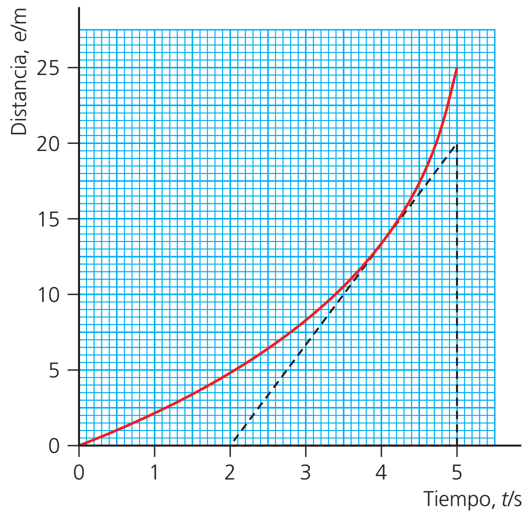
a Utilizando el triángulo que se muestra en la gráfica:

$$\text{gradiente} = \text{densidad} = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{245 - 75}{80 - 20} = 2{,}8\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$$

b El instrumento utilizado para medir la masa tenía un error de compensación de cero (de unos +20 g).

c Las medidas individuales pueden ser inexactas. La recta de ajuste reduce el efecto de los errores aleatorios y el error de compensación de cero no afecta al resultado del cálculo.

2 En la Figura 17.8 se muestra una gráfica distancia-tiempo para un coche que se acelera. Determina la velocidad del coche al cabo de 4s (igual al gradiente a la curva en ese momento).



■ **Figura 17.8** *Gráfica de la distancia* e *respecto al tiempo* t *para un coche que se acelera*

La línea inclinada discontinua es la tangente a la curva en el instante $t = 4\,\text{s}$.

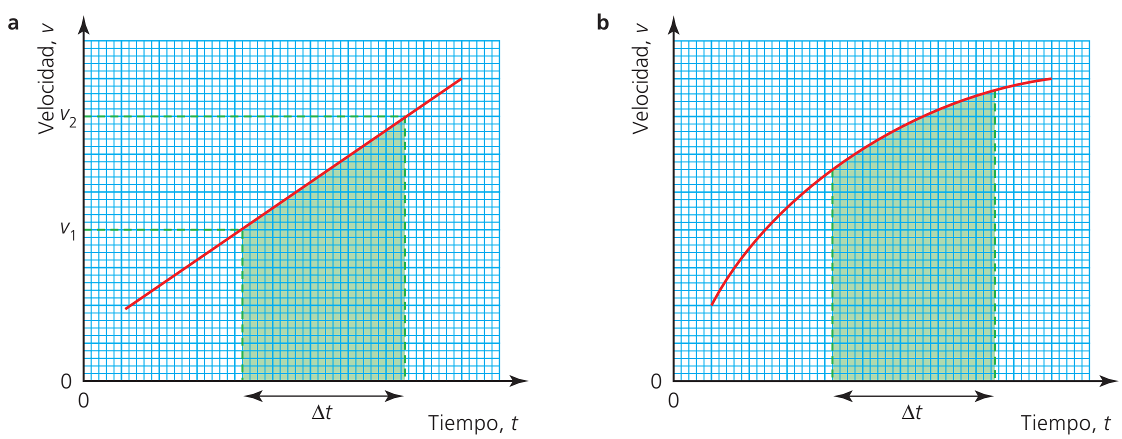
$$\text{gradiente} = \text{velocidad} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{5{,}0 - 2{,}0} = \frac{20}{3{,}0} = 6{,}7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

Áreas bajo las gráficas

El área bajo muchas gráficas tiene un significado físico. A modo de ejemplo, consideremos la Figura 17.9a, en la que se representa parte de una gráfica velocidad-tiempo para un vehículo que se mueve con aceleración constante. El área bajo la gráfica (la zona sombreada) se puede calcular a partir de la velocidad media, que viene dada por $\frac{(v_1 + v_2)}{2}$, multiplicada por el tiempo, Δt. El área bajo la gráfica es, por tanto, equivalente a la distancia recorrida durante el tiempo Δt.

El vehículo de la Figura 17.9b se mueve con una aceleración variable (decreciente), de manera que la gráfica es una curva, pero se aplica la misma regla: el área bajo la gráfica (sombreada) representa la distancia recorrida durante el tiempo Δt.

■ **Figura 17.9** *Área bajo una gráfica velocidad-tiempo para* **a** *aceleración constante y* **b** *aceleración variable*



El área de la Figura 17.9b se puede estimar de diversas maneras, por ejemplo contando cuadrados de pequeño tamaño o dibujando un rectángulo que parece (a ojo) tener la misma área. (Si se conoce la ecuación de la curva se puede calcular mediante el proceso denominado *integración*).

Ejemplo resuelto

3 En la Figura 17.10 se representa el movimiento de un tren que viaja a una velocidad constante durante 30 s y que a continuación decelera durante 60 s. Calcula la distancia recorrida en 90 s (igual al área bajo la gráfica).

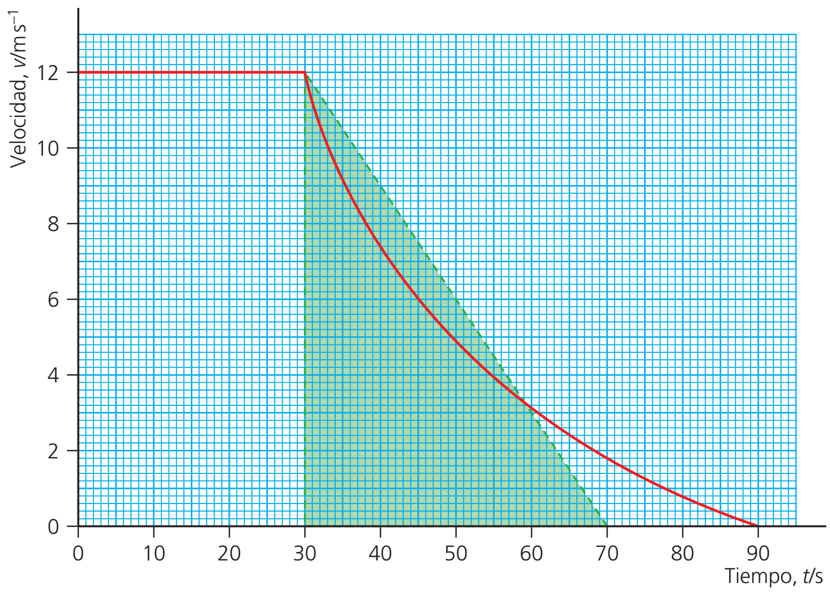


Figura 17.10 *Gráfica de la velocidad, v, en función del tiempo, t, para un tren*

El área bajo la gráfica hasta los 30 s de tiempo = 12 × 30 = 360 m.

El área bajo la gráfica entre los 30 s y los 90 s se puede estimar a partir del triángulo sombreado, que se ha dibujado de manera que su área parece ser la misma que el área bajo la curva:

$\text{área} = \frac{1}{2} \times 12 \times (70 - 30) = 240\,\text{m}$

$\text{distancia total (área)} = 360 + 240 = 600\,\text{m}$

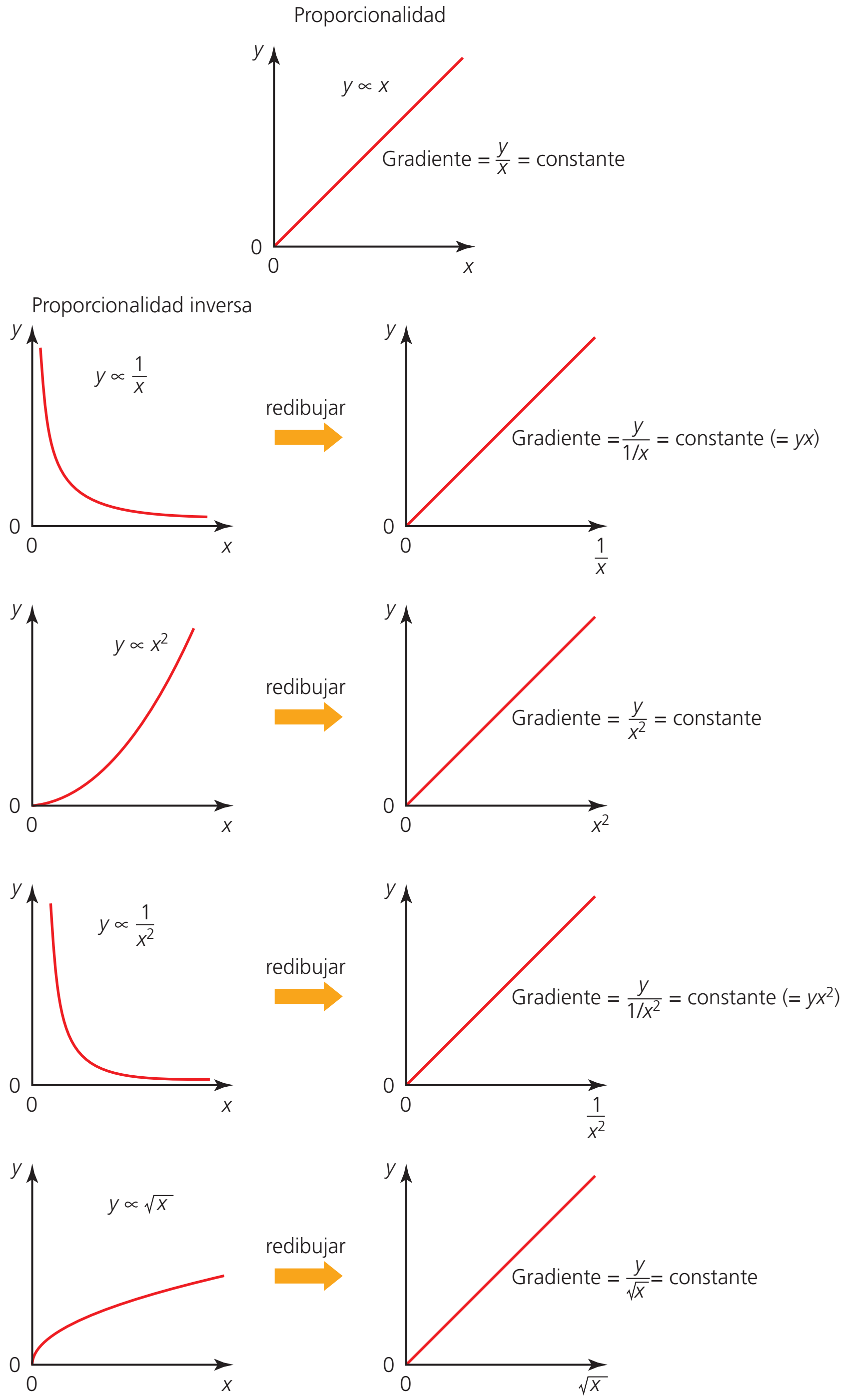
Utilidad de las gráficas lineales (rectas)

Las líneas rectas son mucho más fáciles de comprender y de analizar que las curvas; sin embargo, cuando medimos directamente datos experimentales y los representamos gráficamente uno en función del otro (x e y, por ejemplo), lo que obtenemos mayoritariamente son curvas y no rectas.

Los datos que proporcionan una curva x-y se pueden utilizar para dibujar otras gráficas y comprobar otras relaciones posibles. Por ejemplo:

- Se puede dibujar una grafica de y en función de x^2 con el fin de obtener una recta que pase por el origen, lo que confirmaría que y es proporcional a x^2.
- Una gráfica de y en función de $\frac{1}{x}$ que pasa por el origen confirmaría que y es proporcional a $\frac{1}{x}$ (en cuyo caso se dice que x e y son **inversamente proporcionales** entre sí).
- Una gráfica de y en función de $\frac{1}{x^2}$ que pasa por el origen representaría una **relación con el inverso del cuadrado**.

En la Figura 17.11 se muestran gráficas de las relaciones más frecuentes.



■ **Figura 17.11** *Algunas relaciones gráficas frecuentes en las que se muestra cómo se pueden redibujar las curvas para obtener líneas rectas*

Ejemplo resuelto

4 En una evaluación interna se pide a los alumnos que investiguen uno de los factores que afectan al combado de una viga de madera que está sujeta únicamente por un extremo (una viga levadiza) y de la que cuelga una masa (carga) en algún punto situado en la parte que sobresale del extremo del banco (Figura 17.12).

Uno de los alumnos enumera las variables siguientes: (i) tipo de madera, (ii) espesor de la madera, (iii) anchura de la madera, (iv) longitud de madera desde el punto en que se fija, *L*, (v) posición de la carga, (vi) masa de la carga. Decide investigar cómo depende el combado, *D*, de la longitud, *L*, manteniendo el resto de variables constantes. Sus resultados se muestran en la Tabla 17.1 (las incertidumbres no se han incluido por simplicidad).

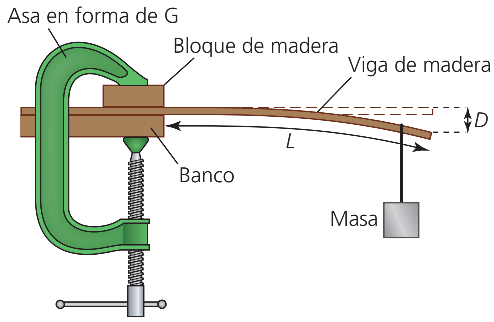


Figura 17.12

Tabla 17.1

L/cm	*D*/cm
30,0	0,8
40,0	2,0
50,0	3,7
60,0	6,5
70,0	10,8
80,0	15,8
90,0	22,2
100,0	31,2

a La gráfica de los datos sin procesar produce una curva, por tanto el alumno piensa que es posible que el combado sea proporcional a la longitud al cuadrado o a la longitud al cubo. Realiza algunas comprobaciones con los datos para ver si alguna de estas posibilidades es correcta.
b Dibuja una gráfica apropiada para confirmar la relación correcta.

a Si el combado, *D*, es proporcional a la longitud, L al cuadrado, $\frac{L^2}{D}$ (o $\frac{D}{L^2}$) será constante, dentro de los límites de las incertidumbres experimentales. Los cálculos producen los resultados siguientes (todos × 10^2 cm): 11,0; 8,0; 6,8; 5,5; 4,5; 4,1; 3,6; 3,2. Estos valores disminuyen cuando las longitudes aumentan, y claramente *no* son constantes.

Si el combado, *D*, es proporcional a la longitud, *L* al cubo, $\frac{L^3}{D}$ (o $\frac{D}{L^3}$) será constante, dentro de los límites de las incertidumbres experimentales. Los cálculos producen los resultados siguientes (todos × 10^4 cm^2): 3,4; 3,2; 3,4; 3,3; 3,2; 3,2; 3,3; 3,2. Estos valores son todos muy similares (dentro del 3% de su promedio), lo que confirma que el combado es proporcional a la longitud al cubo.

b Véase la Figura 17.13. Una gráfica de *D* en función de L^3 produce una línea recta que pasa por el origen. Fíjate en que habría sido mejor que el alumno hubiera empleado longitudes de modo que los puntos se hubieran distribuido uniformemente a lo largo de la recta.

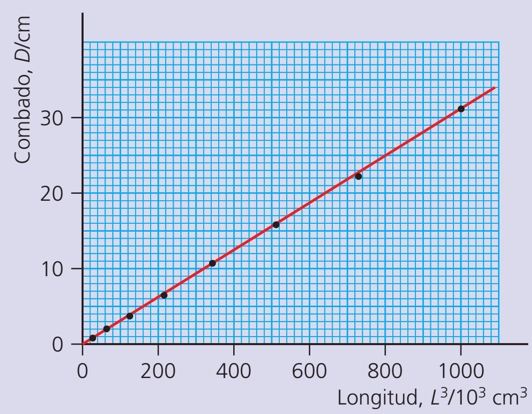


Figura 17.13

Ecuación de una recta

Todas las gráficas lineales se pueden representar mediante una ecuación de la forma:

$y = mx + c$

donde m es el gradiente y c es el valor de y cuando $x = 0$, conocido como **corte con el eje y** (Figura 17.14).

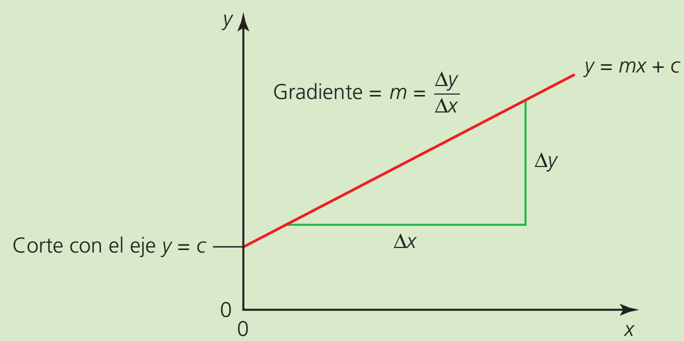


Figura 17.14 *Gráfica de y = mx + c*

Una vez dibujada la gráfica, se pueden determinar los valores del gradiente y del corte con el eje y y los resultados se pueden utilizar para obtener una ecuación matemática que describe la relación.

Ejemplo resuelto

5 Los datos experimentales que conectan dos variables, x e y, están representados en la gráfica de la Figura 17.15. Toma medidas a partir de la gráfica que te permitan escribir una ecuación que represente la relación.

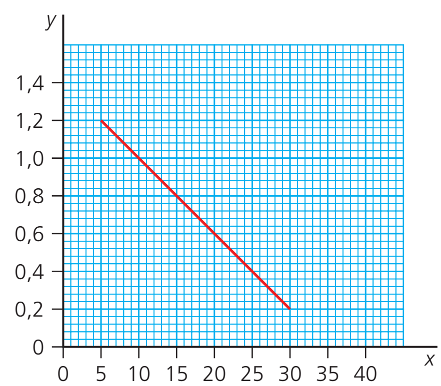


Figura 17.15

El gradiente de la recta, m, es $\frac{0{,}2 - 1{,}2}{30 - 5} = -0{,}04$ y el corte con el eje y, c, es 1,4.
Sustituyendo en $y = mx + c$, obtenemos:

$y = -0{,}04x + 1{,}4$

(que se puede reescribir como $25y = 35 - x$).

Leyes potenciales y gráficas logarítmicas

En ocasiones no hay una relación «simple» entre dos variables o bien puede que no tengamos ni idea de cuál puede ser la relación. Por eso, en general, podemos escribir una relación entre las variables x e y de la forma:

$$y = kx^p$$

donde k y p son constantes. Es decir, y es proporcional a x elevada a p.

Si tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$\log y = p \log x + \log k$$

Comparemos la ecuación anterior con la ecuación de una recta, $y = mx + c$.

Si dibujamos una gráfica de log y en función de log x, tendrá gradiente p y el corte con el eje log y será log k. Utilizando esta información, podemos escribir una ecuación matemática para describir la relación. Fíjate en que en la ecuación anterior hemos usado logaritmos en base 10, pero también podemos usar **logaritmos naturales (ln)** (solo para Nivel Superior).

Ejemplos resueltos

6 En la Figura 17.16 se muestra la relación entre dos variables, x e y. Toma medidas a partir de la gráfica para poder escribir una ecuación que represente la relación.

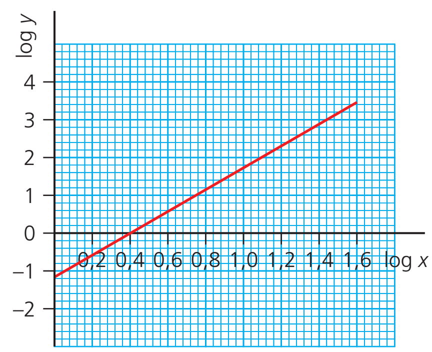


Figura 17.16

El gradiente de la recta, p, es 2,9 y el corte con el eje log y, log k, es −1,2. Sustituyendo en $\log y = p \log x + \log k$ obtenemos:

$$\log y = 2{,}9 \times \log x - 1{,}2$$

Por tanto,

$$y = 0{,}063x^{2{,}9}$$

7 Volvamos a referirnos al Ejemplo resuelto 4. Utiliza los datos para dibujar una gráfica logarítmica que verifique que la relación se describe mediante la ecuación $D = kL^m$. Determina los valores de m y k a partir de la gráfica.

Si tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\log D = m \log L + \log k$$

Comparando con $y = mx + c$, sabemos que una gráfica de log D en función de log L tendrá un gradiente m, y que k se puede determinar a partir del corte con el eje (Figura 17.17).

$$m = 3{,}1 \text{ y } k = 2{,}2 \times 10^{-5}$$

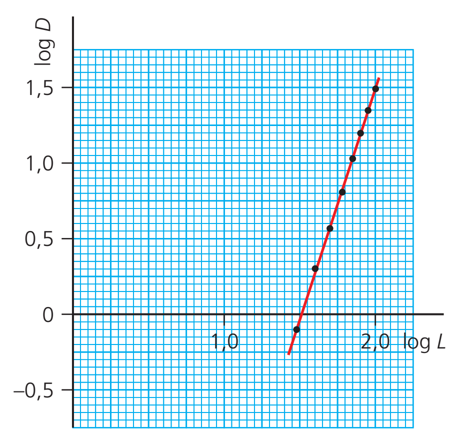


Figura 17.17