Ejercicios de repaso

1.2 Aproximaciones

Aproximaciones: número de decimales, cifras significativas. Errores de aproximación. Estimación de resultados de operaciones

1 Redondea los siguientes números a los:

i 1 000 **ii** 100 **iii** 10

a 2 842 **b** 12 938 **c** 9 581 **d** 496

2 Redondea los siguientes números a:

i un decimal **ii** dos decimales **iii** tres decimales

a 2,1827 **b** 0,9181 **c** 9,9631 **d** 0,0386

3 Redondea los siguientes números a:

i una cifra significativa **ii** dos cifras significativas **iii** tres cifras significativas

a 3,9467 **b** 20,36 **c** 0,01548 **d** 0,9752

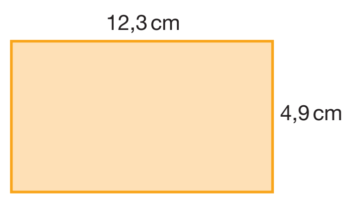
4 Sin utilizar la calculadora estima el valor de las siguientes operaciones.
Explica en cada caso cómo lo has hecho.

a 305×9 **b** $19{,}2^2$ **c** $\dfrac{26{,}1 \times 3{,}8}{11}$

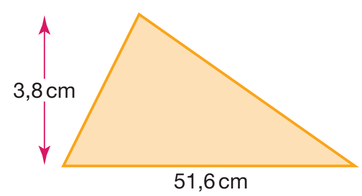
d $408 \div 18{,}8$ **e** $\dfrac{8{,}7^2 \times 1{,}9^2}{21{,}3}$ **f** $(32{,}2 \times 3{,}1)^2$

5 Haz una estimación del área de cada una de estas figuras. Explica en cada caso cómo lo has hecho.

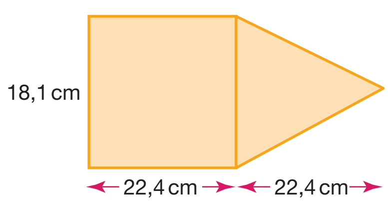
a



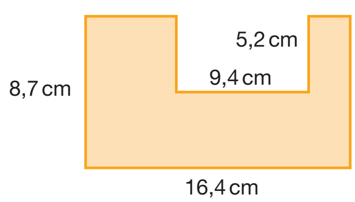
b



c



d



6 **a** Calcula las áreas de las figuras del ejercicio 5.
b Halla el porcentaje de error cometido en cada una de las estimaciones del ejercicio anterior.

Continúa en la página siguiente …

7 Una marca de básculas asegura que sus productos tienen una precisión de ±3% del peso.
Se pesa una maleta, y la báscula marca 18,5 kg. Calcula:

a Lo máximo que podría pesar la maleta.
b Lo mínimo que podría pesar la maleta.

8 A veces, se aproxima el valor de π a 3 o a $\frac{22}{7}$.

Un círculo tiene un radio de 8 cm.

a Utiliza la tecla π de la calculadora para hallar el área del círculo y escribe el resultado con cinco cifras decimales.
b Calcula el porcentaje de error cometido al calcular el área si aproximas π a 3.
c Calcula el porcentaje de error cometido al calcular el área si aproximas π a $\frac{22}{7}$.

9 La fórmula para pasar de grados centígrados (C) a grados Fahrenheit (F) es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a La temperatura de una clase es de 18 °C. Utiliza la fórmula anterior para pasar la temperatura a grados Fahrenheit.
Una aproximación de la fórmula anterior es $F = 2C + 30$.
b Calcula la temperatura de la clase en grados Fahrenheit utilizando la aproximación anterior.
c Calcula el porcentaje de error que se ha cometido con dicha aproximación para una temperatura de 18 °C.
d ¿Qué porcentaje de error se cometería con dicha aproximación para una temperatura de 30 °C?
e ¿A qué temperatura el porcentaje de error sería cero?

10 La fórmula para calcular la velocidad de una piedra que se ha lanzado desde un precipicio es $v = gt$, donde v es la velocidad en m/s, g la aceleración en m/s^2 y t el tiempo en segundos.

a Si se toma $g = 9{,}81$ m/s^2, calcula cuál será la velocidad de la piedra transcurridos 6 segundos.
b Calcula la velocidad de la piedra si se utiliza una aproximación de g a 10 m/s^2.
c Calcula el porcentaje de error cometido en la aproximación.

1.3 Notación científica

Expresión de un número como $a \times 10^k$ donde $1 \leq a \leq 10$ y k es un entero
Operaciones con números expresados de esta forma

1 Entre los números siguientes, marca los que no están expresados en notación científica; es decir, como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $7{,}3 \times 10^3$ **b** $60{,}4 \times 10^2$ **c** $1{,}0 \times 10^{-2}$
d $0{,}5 \times 10^3$ **e** $3{,}874 \times 10^5$ **f** 8×10^{-6}

2 Escribe los siguientes números en notación científica; es decir, como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 32 000 **b** 620 **c** 777 000 000
d 90 000 **e** 8 millones **f** 48,5 millones

3 Estas son las distancias (en kilómetros) desde Londres hasta otras cinco ciudades del mundo.

De Londres a Tokio	9 567 km
De Londres a París	343 km
De Londres a Wellington	18 831 km
De Londres a Cambridge	78 km
De Londres a El Cairo	3 514 km

Escribe cada distancia en notación científica —es decir, como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$— y exprésalas con dos cifras significativas.

4 Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica; es decir, como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $500 \times 6\,000$ **b** $20 \times 450\,000$
c 3 millones $\times$ 26 **d** 5 millones $\times$ 8 millones

5 Escribe los siguientes números como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 0,04 **b** 0,0076 **c** 0,000005 **d** 0,03040

6 Escribe los siguientes números ordenados de menor a mayor.

$3{,}6 \times 10^{-3}$ $2{,}5 \times 10^{-2}$ $7{,}4 \times 10^{-2}$
$9{,}8 \times 10^{-1}$ $8{,}7 \times 10^{-4}$ $1{,}4 \times 10^{-2}$

7 Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $6{,}3 \times 10^2 \div 8{,}4 \times 10^5$ **b** $400 \div 800\,000$
c $7 \times 10^4 \div 4{,}2 \times 10^8$ **d** $\dfrac{1{,}5 \times 10^2}{9 \times 10^{10}}$

8 Halla n para que se cumplan las siguientes igualdades:

a $0{,}0003 = 3 \times 10^n$ **b** $0{,}000046 = 4{,}6 \times 10^n$
c $0{,}005^2 = 2{,}5 \times 10^n$ **d** $0{,}0006^n = 2{,}16 \times 10^{-10}$

9 Un niño recorre 40 km a una velocidad constante de 2 m/s.

Calcula cuántos segundos tarda en recorrer los 40 km.
Expresa el resultado como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

10 El radio de la Tierra mide aproximadamente 6 370 km.
Calcula el perímetro de la Tierra en metros y expresa el resultado con tres cifras significativas y en notación científica; es decir, como $a \times 10^k$, donde $1 \leq a \leq 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

1.4 Unidades de medida del Sistema Internacional

El SI (Sistema Internacional) y algunas unidades básicas de medida; por ejemplo, kilogramo (kg), metro (m), segundo (s), litro (l), metro por segundo (m/s) o grado Celsius

1 Haz una estimación de las siguientes medidas en la unidad apropiada.

- **a** El peso de una maleta grande.
- **b** La longitud de una cancha de baloncesto.
- **c** La altura de un edificio de dos plantas.
- **d** El volumen del depósito de combustible de un coche.
- **e** La distancia que hay entre el Polo Norte y el Polo Sur.
- **f** El peso de una mesa de ping-pong.

2 Haz la conversión de la medida que se pide en cada caso.

- **a** 20 cm a milímetros
- **b** 35 km a metros
- **c** 46 mm a centímetros
- **d** 60 m a kilómetros
- **e** 320 m a milímetros
- **f** 95 mm a kilómetros

3 Expresa los siguientes pesos en la unidad que se indica en cada caso.

- **a** 100 kg en toneladas
- **b** 60 g en kilogramos
- **c** 3,6 toneladas en kilogramos
- **d** 14 g en miligramos
- **e** 8,67 kg en miligramos
- **f** 2 560 g en toneladas

4 Expresa los siguientes volúmenes en la unidad que se indica en cada caso.

- **a** 2 600 ml a litros
- **b** 80 ml a litros
- **c** 1,65 litros a mililitros
- **d** 0,085 litros a mililitros

5 Cuatro recipientes tienen los siguientes pesos:

25 kg   0,35 t   650 g   0,27 kg

Calcula el peso total de los cuatro recipientes en kilos.

6 Las longitudes de cinco objetos son las siguientes:

56 m   24 cm   0,672 m   1 030 mm   1,5 cm

Calcula la longitud que alcanzarían los cinco objetos si los colocáramos uno detrás de otro.

7 El líquido contenido en cuatro recipientes con los volúmenes que se indican se aboca a un tanque de 30 litros de capacidad.

3 250 ml   1,05 litros   26 000 ml   762 ml

Calcula el líquido que se derrama, en litros, tras abocar el contenido de los cuatro recipientes en el tanque.

1.6 Resolución gráfica de ecuaciones

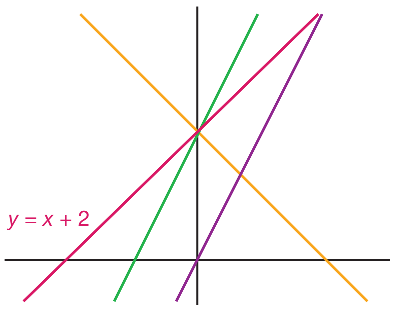
Uso de la CG para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y ecuaciones de segundo grado

Resuelve estos ejercicios con la CG o con algún programa gráfico.

1 Dibuja las siguientes rectas sobre los mismos ejes de coordenadas y nómbralas. Escribe la coordenada en la que cortan al eje *Y*.

a $y = x - 5$ **b** $y = 2x - 5$ **c** $y = -x - 5$

2 En la siguiente figura hay cuatro rectas dibujadas y aparece señalada la recta $y = x + 2$. Escribe las posibles ecuaciones de las otras tres rectas.



3 Represente las rectas de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y halla las coordenadas del punto de intersección.

a $\begin{cases} y = 8 - x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 3y = x + 14 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} y = 3 - 4x \\ 3y + 10x = 16 \end{cases}$ **d** $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$

4 **a** Dibuja sobre los mismos ejes las siguientes rectas.

$y = \frac{1}{2}x + 3$ $x = 2y + 8$

b Explica por qué no se cortan en ningún punto.

5 Representa las siguientes expresiones cuadráticas en diferentes ejes.

a $y = x^2 + 6x + 8$ **b** $y = x^2 - 16$
c $y = 9 - x^2$ **d** $y = -(x - 3)(x - 5)$

6 Para cada expresión cuadrática:

i Representa su gráfica.
ii Halla las coordenadas de sus raíces si las tiene.

a $y = x^2 - 10x + 21$ **b** $y = 12 + 4x - x^2$
c $y = -x^2 + 10x - 25$ **d** $y = 2x^2 - 12x + 20$
e $y = 8x^2 - 2x - 1$

1.7 Progresiones y series aritméticas

Progresiones y series aritméticas, y sus aplicaciones
Expresión algebraica del enésimo término y la suma de los n primeros números de una progresión

1 Se da la relación de recurrencia y el término u_1 de las siguientes sucesiones.

i Calcula u_2, u_3 y u_4.

ii Determina si la sucesión es una progresión aritmética o no.

a $u_{n+1} = u_n - 6,\ u_1 = 15$ **b** $u_{n+1} = 12 - u_n,\ u_1 = 15$

c $u_{n+1} = 3u_n + 2,\ u_1 = \frac{1}{2}$ **d** $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 5}{2},\ u_1 = 5$

2 Para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

i Deduce el término general u_n. **ii** Calcula el término u_{20}.

a 4, 9, 14, 19, 24 **b** 3, –5, –13, –21, –29

c −4,5; −2; 0,5; 3; 5,5 **d** 3,5; 3,25; 3; 2,75; 2,5

3 Para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

i Halla la diferencia, d. **ii** Deduce el término general, u_n.

a –25, …, …, …, –1 **b** 7, …, …, …, …, …, –14

c $u_4 = -12,\ u_{20} = 100$ **d** $u_7 = 19,\ u_{42} = -128$

4 Desarrolla las siguientes expresiones escribiendo todos sus términos.

a $\sum_{1}^{5} 2n - 1$ **b** $\sum_{3}^{7} -n + 6$ **c** $\sum_{2}^{8} 6 - \frac{1}{2}n$ **d** $\sum_{1}^{4} 3(-n + 2)$

5 Escribe las siguientes series aritméticas utilizando la notación $\sum$. Cada una de las series comienza con $n = 1$.

a $2 + 6 + 10 + 14 + 18$ **b** $5 + 3 + 1 + -1 + -3 + -5$

c $-\frac{1}{2} + 1 + 2\frac{1}{2} + 4 + 5\frac{1}{2} + 7$ **d** $-4{,}1 + -4{,}2 + -4{,}3 + -4{,}4$

6 Opera las siguientes expresiones.

a $\sum_{1}^{50} 3n$ **b** $\sum_{1}^{25} 20 - n$ **c** $\sum_{20}^{30} n + 1$ **d** $\sum_{4}^{32} -2n + 50$

7 Los términos de las posiciones 5 y 15 de una serie aritmética son –10 y 10, respectivamente. Calcula:

a La diferencia, d. **b** El primer término.

c El término 20. **d** S_{20}.

8 El término de la posición 11 de una serie aritmética es 65. Si $S_{11} = 495$, calcula:

a El primer término.

b La diferencia, d.

c S_{20}.

9 El séptimo término de una serie aritmética es 2,5 veces el segundo término x. Si el décimo término es 34, calcula:

a La diferencia en función de x.

b El primer término.

c La suma de los 10 primeros términos.

10 El primer término de una serie aritmética es 24. El último término es –12. Si la suma de la serie es 150, ¿cuántos términos tiene la serie?

1.8 Progresiones y series geométricas

Progresiones y series geométricas
Expresión algebraica del enésimo término y la suma de los n primeros números de la progresión

1 Explica cuál es la diferencia entre una progresión aritmética y una progresión geométrica.

2 Se da la relación de recurrencia y u_1 de las siguientes sucesiones.

i Halla los valores de u_2, u_3 y u_4.

ii Determina si son progresiones geométricas o no.

a $u_{n+1} = 4u_n + 2,\ u_1 = 0$ **b** $u_{n+1} = -3u_n,\ u_1 = 1$

c $u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n,\ u_1 = 6$ **d** $u_{n+1} = \dfrac{6-2u_n}{2},\ u_1 = 4$

3 Para las siguientes progresiones geométricas calcula:

i La razón, r.

ii Los siguientes dos términos.

iii El término general de la progresión, u_n.

a 5, 15, 45, 135 **b** 1296, 216, 36, 6

c 36, 24, 16, $10\frac{2}{3}$ **d** 4, –10, 25, $-62\frac{1}{2}$

4 El término enésimo de una progresión geométrica se obtiene con la expresión $u_n = -3 \times 4^{n-1}$. Calcula:

a u_1, u_2 y u_3

b El valor de n si $u_n = -12\,288$.

5 Parte de una progresión geométrica es …, 27, …, …, 1, … donde u_2 y u_5 son 27 y 1, respectivamente. Calcula:

a La razón, r. **b** u_1 **c** u_{10}

6 La compradora de una vivienda pide un préstamo de 300 000 $ a un banco que cobra unos intereses del 5,5% anual. Si no puede hacer ningún pago durante los primeros cuatro años, ¿cuánto más tendrá que devolver al final del cuarto año por los intereses?

7 Opera las siguientes sumas.

a $\sum_{1}^{5} 3^n$ **b** $\sum_{1}^{6} -2(3)^{n-1}$ **c** $\sum_{1}^{10} \frac{1}{2}(4)^n$ **d** $\sum_{2}^{7} 9\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

8 En una serie geométrica en la que $u_3 = 10$ y $u_6 = \frac{16}{25}$, halla:

a La razón, r.

b El primer término.

c S_7.

9 Cuatro términos consecutivos de una serie geométrica son $(p - 5)$, (p), $(2p)$ y $(3p + 10)$.

a Halla p.

b Calcula los dos términos anteriores a $(p - 5)$.

c Si $u_3 = (p - 5)$, halla S_{10}.

10 En una serie geométrica, $u_1 + u_2 = 5$. Si $r = \frac{2}{3}$, ¿cuánto es la suma de sus infinitos términos?

1.9 Interés simple e interés compuesto

Aplicaciones financieras de las progresiones y series geométricas: interés compuesto y depreciación anual

1 Halla el interés que se obtiene con cada capital, C, depositado en una cuenta durante n años a un interés del r%.

a $C = 550$ £ $n = 5$ años $r = 3\%$

b $C = 8\,000$ \$ $n = 10$ años $r = 6\%$

c $C = 12\,500$ € $n = 7$ años $r = 2{,}5\%$

2 En un banco se deposita un capital de 25 000 £ y a los 8 años se obtiene un interés de 7 000 £. Calcula la tasa de interés anual ofrecida si se ha mantenido constante los 8 años.

3 Un banco le presta a una empresa 250 000 \$ a un interés simple anual del 8,4%. Al devolver el préstamo la empresa paga 105 000 \$ de intereses. ¿Cuántos años ha tardado la empresa en devolver el préstamo?

4 Se depositan 15 000 \$ en una cuenta bancaria, de la que no se saca ni se ingresa cantidad alguna. La siguiente progresión aritmética representa el dinero que hay en la cuenta cada año.

Años	0	1	2	3	4	5		n
Cantidad de dinero en la cuenta (\$)	15 000	15 375	15 750	16 125	16 500	16 875		

a Explica, justificadamente, si la sucesión representa un interés simple o compuesto.

b Calcula la tasa de interés.

c Halla la fórmula para calcular el capital total (T) de la cuenta a los n años.

d Halla la fórmula para calcular los intereses totales (I) obtenidos a los n años.

Continúa en la página siguiente …

5 Se depositan 15 000 $ en una cuenta bancaria, de la que no se saca ni se ingresa cantidad alguna. En esta progresión geométrica consta el dinero que hay en la cuenta cada año.

Años	Cantidad de dinero en la cuenta ($)
0	15 000
1	16 500
2	18 150
3	19 965
4	21 961,50
5	24 157,65
n	

a Explica, justificadamente, si la sucesión representa un interés simple o compuesto.

b Calcula la tasa de interés.

c Halla la fórmula para calcular el capital total (T) de la cuenta a los n años.

d Halla la fórmula para calcular los intereses totales (I) obtenidos a los n años.

6 Halla el interés compuesto de cada uno de los siguientes capitales, C, depositados en una cuenta bancaria durante n años a un interés anual del r%.

a $C = 400$ £ $n = 2$ años $r = 3\%$

b $C = 5000$ $ $n = 8$ años $r = 6\%$

c $C = 18000$ € $n = 10$ años $r = 4{,}5\%$

7 Compran un coche por 12 500 €. Su valor se deprecia un 15% anual.

a Calcula cuánto vale:

i Al año. ii A los dos años.

b ¿Cuántos años tienen que pasar para que el coche valga menos de 1 000 €?

8 Se invierten 4 000 € durante tres años al 6% de interés anual compuesto. Halla cuánto se paga de intereses si los intereses se calculan:

a anualmente

b semestralmente

c trimestralmente

d mensualmente

2.3 y 2.5 Datos agrupados, discretos o continuos, y medidas de centralización

Datos agrupados, discretos o continuos: tablas de frecuencia, marca de clase, límites superior e inferior de un intervalo
Histograma de frecuencias
Medidas de centralización
Para variables discretas: media, mediana y moda
Para variables agrupadas, discretas o continuas: cálculo de la media, clase modal

1 En la siguiente tabla se muestran los litros de leche que un grupo de alumnos bebe a la semana.

Litros de leche	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	6	1	4	9	22	16	2	4	1

a Dibuja un histograma de frecuencias con estos datos.
b Di cuál es la moda.
c Calcula cuántos litros semanales beben de media los alumnos.
d Calcula la mediana de litros de leche que beben los alumnos semanalmente.

2 La siguiente tabla muestra los pesos en kilos, M, de las maletas que se han facturado en cierto vuelo de un aeropuerto.

Peso (kg)	$0 \leq M < 5$	$5 \leq M < 10$	$10 \leq M < 15$	$15 \leq M < 20$	$20 \leq M < 25$	$25 \leq M < 30$
Frecuencia	6	18	64	105	94	18

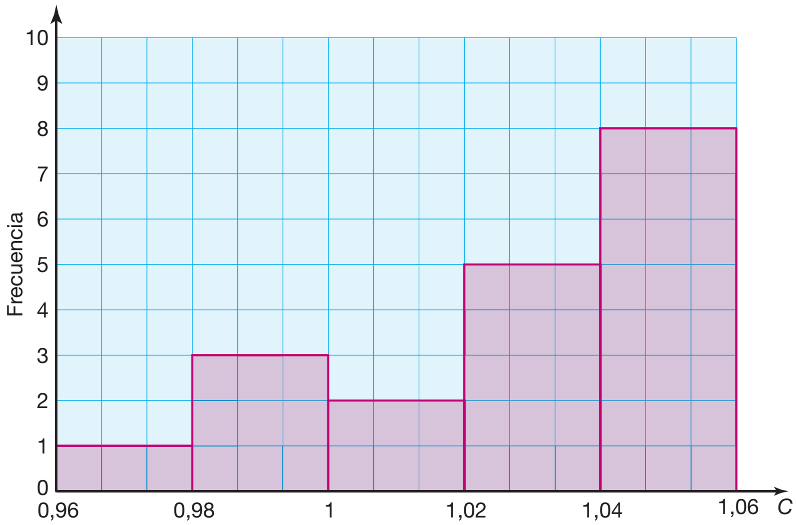
a Halla la clase modal.
b Halla el peso medio estimado de las maletas.
c Di, justificadamente, en qué intervalo se encuentra la mediana.

3 Se toman los pesos en kilogramos, M, de los jugadores de un equipo de fútbol.
La suma de los pesos de los 11 miembros del equipo es de 836 kg.

a Halla el peso medio, $\overline{M}$, de los 11 jugadores.
b El peso medio de los 11 jugadores más 1 sustituto es de 76,75 kg. ¿Cuánto pesa el sustituto?

Continúa en la página siguiente …

4 En el siguiente histograma de frecuencias se muestra el precio (C en euros) del litro de gasolina sin plomo en diferentes gasolineras.



a ¿En cuántas gasolineras se han tomado datos?

b Halla el precio medio de la gasolina sin plomo.

2.4 Frecuencia acumulada

Frecuencia acumulada para variables discretas agrupadas y variables continuas agrupadas; gráficas de frecuencias agrupadas, mediana y cuartiles
Diagramas de caja y bigotes

1 La siguiente tabla de frecuencias agrupadas muestra los resultados en tanto por ciento, x, de una prueba que han realizado 20 estudiantes.

Porcentaje	$0 \leq x < 20$	$20 \leq x < 40$	$40 \leq x < 60$	$60 \leq x < 80$	$80 \leq x < 100$
Frecuencia	2	4	6	7	1

a Calcula las frecuencias acumuladas.

b Dibuja una gráfica de frecuencia acumulada con los resultados anteriores.

c Utiliza la gráfica para hallar la mediana de los resultados de la prueba.

2 Una empresa hace una encuesta entre sus empleados para saber cuánto tiempo (t en minutos) invierten en llegar al trabajo cada día. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo (min)	$0 \leq t < 15$	$15 \leq t < 30$	$30 \leq t < 45$	$45 \leq t < 60$	$60 \leq t < 75$
Frecuencia	1	3	12	22	12

a Calcula la frecuencia acumulada de los datos.

b Con los resultados anteriores dibuja la gráfica de la frecuencia acumulada.

c Utiliza la gráfica para hacer una estimación de la mediana del tiempo invertido en llegar al trabajo.

d Utiliza la gráfica para estimar el tiempo que el 50% central de los trabajadores invierten para llegar al trabajo.

e Dibuja un diagrama de caja que resuma la información.

3 Un grupo de 150 alumnos se inscriben en un concurso de Matemáticas. La nota máxima que se puede obtener es de 300 puntos. En la siguiente tabla se muestra el resumen de los resultados (x) de los 150 alumnos.

Puntuación	$0 \leq x < 50$	$50 \leq x < 100$	$100 \leq x < 150$	$150 \leq x < 200$	$200 \leq x < 250$	$250 \leq x < 300$
Frecuencia	7	25	56	32	21	9

a Dibuja la gráfica de la frecuencia acumulada de las puntuaciones.

b Utiliza la gráfica para estimar la mediana de las puntuaciones.

c El 25% de los alumnos con mejor puntuación pueden pasar a la siguiente fase del concurso. Utiliza la gráfica para estimar la puntuación mínima necesaria para estar en ese 25%.

Continúa en la página siguiente …

4 Se pesan cuarenta manzanas de la misma variedad en un mercado, y otras cuarenta en un supermercado. En la tabla se muestran los resultados del peso (m en gramos).

Peso (g)	$60 \leq m < 100$	$100 \leq m < 140$	$140 \leq m < 180$	$180 \leq m < 220$	$220 \leq m < 260$
Frecuencia (mercado)	5	8	12	9	6
Frecuencia (supermercado)	0	3	28	9	0

a Dibuja sobre los mismos ejes las gráficas de la frecuencia acumulada de los dos grupos de datos; el de los pesos de las manzanas del mercado y el de las del supermercado.

b Utiliza la gráfica anterior para completar la siguiente tabla.

	Valor mínimo	**Cuartil inferior**	**Mediana**	**Cuartil superior**	**Valor máximo**
Mercado					
Supermercado					

c Utiliza los resultados de la tabla para dibujar un diagrama de caja y bigotes para cada conjunto de datos.

2.6 Medidas de dispersión

Medidas de dispersión: recorrido o rango, rango intercuartil, desviación típica

1 Calcula para los siguientes grupos de números:

i El recorrido. **ii** El rango intercuartil.

a 2 6 12 14 15 15 17 21 22 22

b 26 27 1 14 18 7 19 3 12

2 La siguiente tabla de frecuencias muestra los goles que ha marcado un equipo de fútbol en distintos partidos.

Goles marcados	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	7	6	2	5	2	1

Calcula:

a El rango del número de goles marcados.

b El rango intercuartil del número de goles marcados.

3 Calcula la desviación típica de las siguientes listas de números con la fórmula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$.

a 3 4 7 7 7 8 8 8 8 9

b 1 4 6 8 10 12 15 18 24 30

4 En la siguiente tabla se muestran las temperaturas medias (en °C) que se han registrado en dos complejos turísticos cada día de junio.

Día	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
Temperatura en el complejo A	23	24	22	24	25	26	25	23	23	24	22	24	24	26	27
Temperatura en el complejo B	15	17	24	28	33	33	26	22	22	19	16	16	15	26	31

a Halla la temperatura mensual media del complejo A y la del complejo B.

b Calcula el rango de temperaturas en ambos complejos.

c Calcula el rango intercuartil de las temperaturas de ambos complejos.

d Calcula la desviación típica de las temperaturas de los dos complejos.

e Explica qué quieren decir los resultados del apartado **d**.

5 Los siguientes datos son los tiempos (en segundos) que han hecho dos velocistas durante sus entrenamientos para los 100 m lisos.

Velocista A 11,2 10,9 11,0 10,8 10,9 11,0 11,1 11,1 10,9

Velocista B 10,2 9,9 10,1 11,8 11,2 10,1 10,1 10,3 10,4

a Calcula el tiempo medio que ha hecho cada velocista.

b Calcula las desviaciones típicas de los tiempos que han hecho cada uno de los velocistas.

c ¿Cuál de los velocistas es más rápido? Justifica tu respuesta.

d ¿Qué corredor es más continuo en sus resultados? Justifica tu respuesta.

Continúa en la página siguiente …

6 Los alumnos de dos clases hacen el mismo examen de Matemáticas. En una de las clases, la habilidad matemática de los alumnos es bastante homogénea; sin embargo, en la otra, hay mucha diferencia entre las habilidades de unos y otros. En la tabla se muestra un resumen de los resultados (en tanto por ciento) que han obtenido.

	Media	**Desviación típica**
Clase A	65	8
Clase B	50	2

Deduce, de los resultados, cuál de las dos clases es la que probablemente tenga un nivel matemático homogéneo y cuál es la que tiene niveles muy distintos. Justifica tu respuesta basándote en los datos de la tabla.

3.1 y 3.2 Lógica, conjuntos y razonamiento lógico

Conceptos básicos de lógica simbólica: definición de una proposición y notación simbólica de proposiciones
Oración compuesta: implicación, $\Rightarrow$; equivalencia, $\Leftrightarrow$; negación, $\neg$; conjunción, $\wedge$; disyunción, $\vee$; y disyunción exclusiva, $\veebar$
Traducción del lenguaje verbal al simbólico, y viceversa

1 Determina si las siguientes frases son proposiciones.

Para cada proposición decide si es verdadera, falsa o indeterminada.

a Cinco al cuadrado es 25.

b Las ecuaciones lineales pueden contener x^2.

c *y* es igual a más nueve.

d Ningún perro puede hablar.

e Hoy está nevando.

f ¿Cuántos alumnos hay en tu clase?

2 Escribe las siguientes proposiciones compuestas utilizando los símbolos de conjunción (y), disyunción (o, o ambos) y disyunción exclusiva (o, pero no ambos).

p: Anna tiene un hermano.

q: Petra tiene una hermana.

a Anna tiene un hermano y Petra tiene una hermana.

b Anna tiene un hermano o Petra tiene una hermana o ambas cosas son ciertas.

c Anna tiene un hermano o Petra tiene una hermana, pero no ocurren ambas cosas.

3.3 y 3.4 Tablas de verdad e implicación: recíproca, inversa, contraposición y equivalencia lógica

Tablas de verdad: conceptos de contradicción y tautología
Recíproca, inversa y contrarrecíproca
Equivalencia lógica
Comprobación de la validez de enunciados simples utilizando tablas de verdad

1 Construye una tabla de verdad de las tres proposiciones p, q y r.
Compárala con el espacio muestral del resultado de lanzar tres monedas.

2 ¿Por qué $p \wedge q$ y $p \veebar q$ es una contradicción?

3 Copia y completa la tabla de verdad de las proposiciones p y q.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \veebar q$
V	V				

4 Construye una tabla de verdad para demostrar que en lógica $\neg(p \vee q)$ es equivalente a $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

5 Para las siguientes proposiciones:

i Reescríbelas utilizando la forma «Si … entonces».
ii Enuncia las proposiciones recíproca, inversa y contrarrecíproca.
iii Determina si estas proposiciones son verdaderas o falsas.
a Un número impar es divisible entre dos.
b Un octágono tiene ocho lados.
c Un icosaedro tiene doce caras.
d Los triángulos iguales también son semejantes.

6 **a** Construye una tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \veebar (q \Rightarrow p)$.
b Explica el significado de $(p \Rightarrow q) \veebar (q \Rightarrow p)$ con los resultados de la tabla.

7 **a** Representa la proposición $(p \Rightarrow q) \veebar (q \Rightarrow p)$ con un diagrama de Venn y sombrea la región adecuada.
b Describe la parte sombreada, o las partes sombreadas, utilizando la notación de conjuntos.

3.5 Teoría de conjuntos

Conceptos básicos de la teoría de conjuntos: elementos, $x \in A$; subconjuntos, $A \subset B$; intersección, $A \cap B$; unión, $A \cup B$; complemento, $\overline{A}$

Diagramas de Venn y aplicaciones sencillas.

1 Para los siguientes conjuntos:

i Describe el conjunto con palabras.

ii Añade otros dos elementos.

a {Egipto, Marruecos, Zimbabue, Nigeria, …}

b $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

c {Amazonas, Nilo, Misisipi, …}

d $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

2 Teniendo en cuenta que el conjunto A = {enteros entre el 20 y el 50}.

a Escribe los elementos del conjunto B {números pares}.

b Escribe los elementos del conjunto C {números primos}.

c Escribe los elementos del conjunto D {cuadrados perfectos}.

3 El conjunto $P = \{a, b, c\}$.

Si $Q \subset P$, escribe todos los conjuntos que podrían ser Q.

4 Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a {números impares} $\subseteq$ {números reales}

b $\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset$ {números primos}

c {Nueva York, París, Tokio} $\not\subset$ {ciudades}

d {euro, dólar, yen, rupia} $\subseteq$ {monedas}

5 Si el conjunto universal es $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.

$A = \{35, 40, 45, 50\}$ donde $A \subset U$. Escribe el conjunto definido como $\overline{A}$.

6 U = {días de la semana} y P = {lunes, domingo}. Escribe el conjunto definido como $\overline{P}$.

7 Se tienen los conjuntos M = {Álex, Johanna, Sarah, Vicky, Asif, Gabriella, Pedro} y N = {Álex, Gabriella, Frances, Raúl, Luisa}.

a $M \cup N$ b $M \cap N$ c $M \cap \overline{N}$

8 Se tienen los conjuntos E = {números pares}, F = {números impares} y el conjunto universal U = {enteros positivos}. Describe los siguientes conjuntos.

a $E \cup F$ b $E \cap F$ c $\overline{E} \cap F$

3.6a Espacio muestral

Espacio muestral: suceso, A; suceso complementario, $\bar{A}$

1 Se lanzan dos dados y se suman los resultados obtenidos. Escribe el espacio muestral de los resultados finales.

2 Una bolsa de dulces contiene caramelos de tres colores diferentes: rojo, amarillo y verde. Escribe el espacio muestral si se seleccionan dos al azar.

3 Dos alumnos se presentan a un examen de Matemáticas.

a ¿Qué dos resultados posibles son complementarios?

b ¿Cuál es el espacio muestral?

4 Se marcan 5 goles en un partido de fútbol.

a ¿Qué dos resultados posibles son complementarios?

b ¿Cuál es el espacio muestral del número de goles marcados por cada equipo?

5 Una madre da a luz trillizos.

a ¿Cuántos sucesos posibles se pueden dar con el sexo de los bebés?

b ¿Cuál es el espacio muestral del sexo de los bebés?

6 Se baraja a fondo una baraja de cartas. Si, para un juego, se sacan tres cartas al azar y solo se tiene en cuenta su color.

a ¿Qué dos sucesos complementarios pueden ocurrir?

b ¿Cuál es el espacio muestral del color de las tres cartas?

36b y 37a Probabilidad y sucesos compuestos

Probabilidad de un suceso
Probabilidad del suceso complementario
Valor esperado
Probabilidad de sucesos compuestos, sucesos incompatibles, sucesos independientes

1 En una bolsa de caramelos hay 10 rojos, 6 azules y 8 verdes.

a Si se elige un caramelo al azar, calcula la probabilidad de que sea:

i rojo **ii** rojo o azul

b Si el primer caramelo que se ha sacado de la bolsa es azul y no se ha devuelto a la bolsa, calcula la probabilidad de que el segundo sea:

i rojo **ii** azul o verde

2 Se lanzan dos dados, uno con cuatro caras (numeradas del 1 al 4) y otro de seis caras (numeradas del 1 al 6), y se suman los resultados.

a Copia y completa la siguiente tabla de doble entrada en la que han de aparecer todos los resultados posibles.

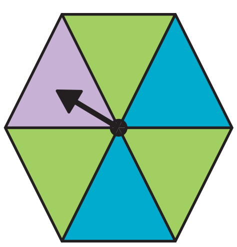
		Dado de seis caras					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado de cuatro caras	**1**					6	
	2						
	3		5				
	4						

b Calcula la probabilidad de que el resultado sea mayor que 8.

c Calcula la probabilidad de que el resultado sea 6.

d ¿Cuál es el valor esperado (media) al lanzar los dos dados y sumar sus resultados?

3 Una ruleta hexagonal se divide en seis triángulos de colores como se muestra en la figura.



Se hace girar la ruleta dos veces.

a Dibuja el diagrama de árbol con todos los posibles resultados.

b Escribe en cada rama la probabilidad del resultado.

c Calcula la probabilidad de que salga azul las dos veces seguidas.

d Halla la probabilidad de que salga azul al menos una de las dos veces.

Continúa en la página siguiente …

4 Un equipo de fútbol juega tres partidos: puede ganar, perder o empatar. El resultado de cada partido es independiente del obtenido en los otros. La probabilidad de ganar es de $\frac{2}{3}$, y la de empatar de $\frac{1}{4}$.

a Halla la probabilidad de perder.

b Halla la probabilidad que tiene el equipo de ganar los tres partidos.

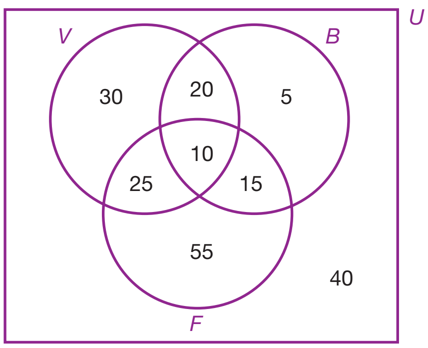
c Calcula la probabilidad que tiene el equipo de no perder ningún partido.

5 Una alumna compara 15 papeletas para una rifa en la que se han vendido 300 papeletas. Los premios se eligen sacando dos números al azar de los 300 de la rifa. Calcula la probabilidad de que:

a La alumna gane los dos premios.

b La alumna gane, al menos, uno de los premios.

6 En una universidad existen tres asociaciones deportivas a las que pueden acudir los alumnos después de clase. Estas son: la de voleibol (V), la de baloncesto (B) y la de fútbol (F). En el siguiente diagrama de Venn se muestra cuántos alumnos acuden a cada una de ellas.



a ¿Cuántos alumnos no están inscritos en ninguna de las asociaciones?

Se elige un alumno al azar, calcula las siguientes probabilidades.

b La probabilidad de que el alumno juegue al voleibol.

c $P(V \cap B)$ **d** $P(V \cap B \cap F)$ **e** $P(V \cup F)$ **f** $P(\overline{F})$

7 Se tienen los siguientes conjuntos de números.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

$C = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

a Dibuja un diagrama de Venn que represente los tres conjuntos.

b Si se elige un número al azar, halla las siguientes probabilidades.

i $P(A)$ **ii** $P(B \cup C)$ **iii** $P(\overline{A} \cap B)$

8 En una clase en la que hay 30 alumnos, 24 estudian Biología, 14 estudian Química y 1 no estudia ninguna de las dos asignaturas.

a Haz un diagrama de Venn que represente esta información.

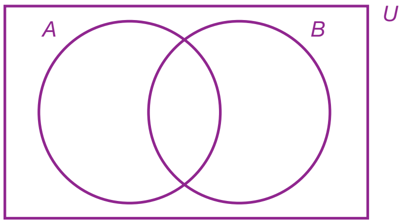
b Si se elige un alumno al azar, halla las siguientes probabilidades.

i $P(\overline{B})$ **ii** $P(B \cup C)$ **iii** $P(B \cap \overline{C})$

3.7b Diagramas de Venn

Uso de diagramas de árbol, diagramas de Venn, diagramas de espacio muestral y tablas de resultados

1 a Copia el siguiente diagrama de Venn.



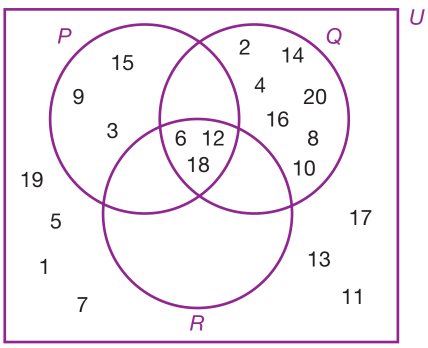
U = {enteros del 1 al 20}

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

b Escribe los elementos de los conjuntos en el diagrama de Venn.

2 En el siguiente diagrama de Venn hay tres conjuntos de números.



Escribe los elementos de los siguientes conjuntos.

a $P = \{\ldots\}$ **b** $R = \{\ldots\}$ **c** $P \cap Q = \{\ldots\}$

d $P \cup Q = \{\ldots\}$ **e** $\overline{P} \cap Q = \{\ldots\}$

3 En el siguiente diagrama de Venn hay tres conjuntos de números. Completa los siguientes conjuntos.

a $L \cap N = \{\ldots\}$

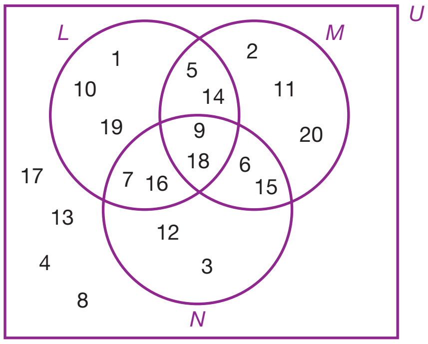
b $N \cup M = \{\ldots\}$

c $L \cap M \cap N = \{\ldots\}$

d $\overline{N} \cap L = \{\ldots\}$

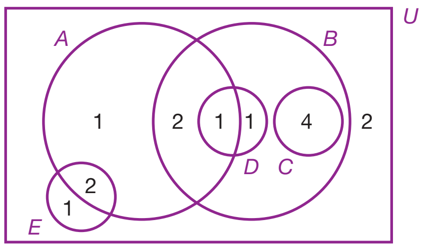
e $\overline{N} \cup \overline{L} = \{\ldots\}$

f $\overline{M} \cup L \cap N = \{\ldots\}$



Continúa en la página siguiente …

4 En el siguiente diagrama de Venn los números muestran la cantidad de elementos que hay en el conjunto. Por ejemplo, $n(E) = 3$.



a Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

i $C \subset B$ **ii** $E \subset A$ **iii** $D \cap C = \varnothing$

b Halla la cantidad de elementos que pertenecen a cada una de la proposiciones.

i $n(B)$ **ii** $n(A)$ **iii** $n(A \cap B)$

iv $n(A \cup E)$ **v** $n(A \cap B \cap D)$ **vi** $n(\bar{A} \cap D)$

5 Dibuja un diagrama de Venn que represente los siguientes conjuntos.

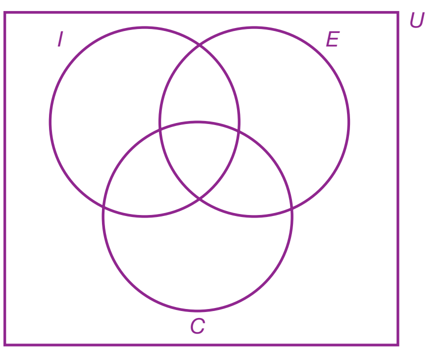
$A = \{3, 4, 7, 8\}$ $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$ $C = \{1, 2, 6\}$

6 En una universidad el 60% de los alumnos estudian Matemáticas, y el 40% estudia Ciencias. El 75% de los alumnos estudia Matemáticas o Ciencias, o ambas.

Haz un diagrama de Venn en el que se represente esta información.

7 Una escuela de idiomas ofrece clases de Inglés, Español y Chino. Cada alumno tiene que elegir, al menos, dos idiomas. El 85% estudia Inglés, el 50% Español y el 20% estudia los tres idiomas.

Copia y completa el siguiente diagrama de Venn con la información dada.



3.7c Las leyes de la probabilidad

Probabilidad utilizando «con reposición» y «sin reposición»
Probabilidad condicionada

1 La probabilidad de que el corredor que ostenta el récord de los 100 m lisos gane una carrera es de 0,85, y la probabilidad de que llegue el segundo es de 0,08.

a ¿Qué probabilidad tiene de terminar la carrera entre los dos primeros?

b Si sabemos que no ha llegado el primero, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado el segundo?

2 Se lanza una moneda y un dado. Halla las probabilidades de obtener.

a Una cruz y un múltiplo de 2.

b Una cruz o un múltiplo de 2.

c Una cruz o un múltiplo de 2, pero no ambos.

3 Tres amigos cumplen años la misma semana. Si damos por hecho que son sucesos independientes, calcula la probabilidad de que cumplan años distintos.

4 Para ir al trabajo, Raúl coge un autobús y luego un tren. Un día concreto la probabilidad de que suba al autobús es de 0,65, y la de que suba al tren es de 0,6.

La probabilidad de no viajar en ninguno de los dos es de 0,2. El suceso A es ir en el autobús, y el B es ir en el tren.

a Halla la probabilidad $P(\overline{A \cup B})$

b Halla $P(A \cup B)$

c Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ calcula $P(A \cap B)$.

d Calcula $P(B|A)$, la probabilidad de que vaya en tren, si fue en autobús.

5 Julie ha estudiado para un examen tipo test de múltiples respuestas. Desgraciadamente solo ha conseguido estudiar un 60% de los temas. Si en el examen hay una pregunta de cualquiera de los temas que ha estudiado, responderá bien.

La probabilidad de acertar una pregunta que no sea de los temas que ha estudiado es de $\frac{1}{5}$.

a Se elige una pregunta al azar, ¿qué probabilidad tiene de contestarla bien?

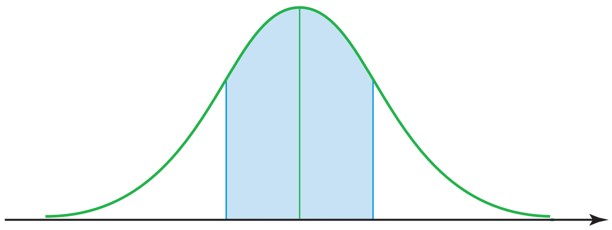
b Si ha respondido correctamente a una pregunta, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca a uno de los temas que estudió?

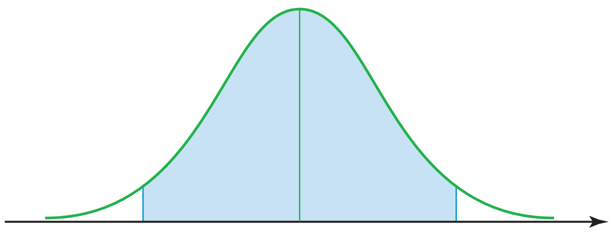
6 Miguel tiene el examen de conducir un día, y el examen de teatro al día siguiente. La probabilidad de que apruebe el examen de conducir es de 0,82; la de que apruebe el de teatro es de 0,95, y la probabilidad de que suspenda ambos exámenes es de 0,01. Si sabemos que ha aprobado el examen de conducir, ¿qué probabilidad tiene de aprobar también el de teatro?

4.1 La distribución normal

Concepto de varios términos: variable aleatoria, los parámetros μ y σ, campana de Gauss, simetría respecto de $x = \mu$
Representación mediante diagramas
Cálculo de probabilidades en una distribución normal
Valor esperado
Cálculos con la tabla inversa de la distribución normal

1 Las siguientes gráficas muestran dos curvas normales.



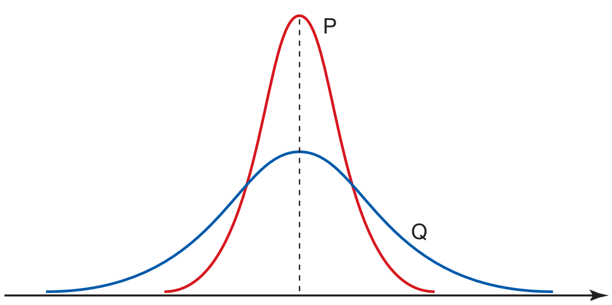


El área sombreada de la primera gráfica representa los datos que están a una desviación típica de la media. El de la segunda representa los datos que están a dos desviaciones típicas de la media.

a Aproximadamente, ¿qué porcentaje de los datos están sombreados en la primera distribución?

b Aproximadamente, ¿qué porcentaje de los datos están sombreados en la segunda distribución?

2 La siguiente figura muestra dos curvas normales, *P* y *Q*.

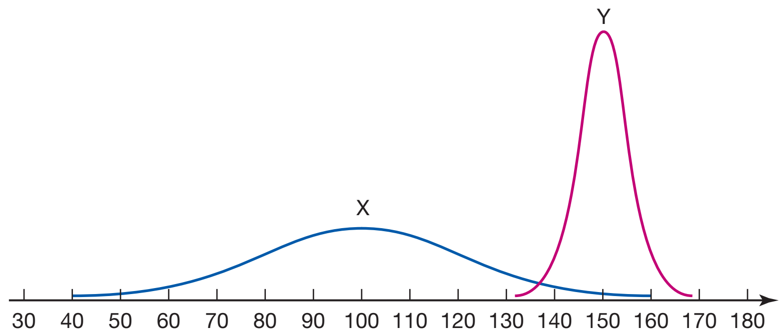


a ¿Qué parámetro estadístico es igual en ambas distribuciones? Justifica tu respuesta.

b ¿Qué parámetro estadístico es diferente en ambas distribuciones? Justifica tu respuesta.

Continúa en la página siguiente …

3 Las longitudes de dos especies de serpientes, X e Y, se distribuyen según las normales que se muestran en la figura.



La especie X tiene como parámetros $\mu = 100$ cm y $\sigma = 20$ cm.

La especie Y tiene como parámetros $\mu = 150$ cm y $\sigma = 5$ cm.

Se captura una serpiente de 150 cm (expresado con tres cifras significativas).

a ¿A cuál de las dos especies es más probable que pertenezca la serpiente?

b Se comprueba que la serpiente es de la especie X. ¿Qué probabilidad hay de que una serpiente de esta especie mida al menos 150 cm?

4 En un supermercado se venden bolsas de guisantes de 500 g. Se sabe que, aunque la bolsas vienen etiquetadas como de 500 g, su peso real se distribuye según una normal con una media de 520 g y con una desviación típica de 12 g.

a ¿Qué porcentaje de bolsas de guisantes pesan menos de 500 g?

b El supermercado devuelve al distribuidor las bolsas que pesan menos de 480 g. Si durante un año pide 10 000 bolsas, ¿cuántas cabe esperar que sean devueltas?

5 Se sabe que las notas de un examen de Matemáticas se distribuyen según una normal con una media de 60 y con una desviación típica de 18.

a Se califica con A al 15% de los alumnos con mejor resultado. ¿Cuál es la nota mínima que tiene que sacar un alumno para conseguir una calificación A?

b Se califica con C al 10% de los resultados que se reparten de forma simétrica a la media (es decir, 5% por encima de la media y 5% por debajo). ¿Entre qué notas se obtiene la calificación C?

6 Se elige al azar a un grupo de personas y se toman sus pesos. Estos pesos están distribuidos según una normal con una media de 65 kg y con una desviación típica de 7 kg.

Hay 26 personas que pesan más de 74 kg.

a Representa con una gráfica de la distribución la información dada.

b Calcula cuántas personas se han pesado.

4.2 y 4.3 Diagramas de dispersión, distribuciones bidimensionales, correlación lineal y la recta de regresión de *y* sobre *x*

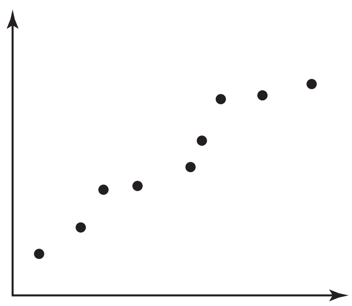
Variables bidimensionales: el concepto de correlación
Diagramas de dispersión: trazado a ojo de la recta que mejor se ajusta y pasa por la media
Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, *r*
Interpretación de las correlaciones positivas, cero o negativas, y de las correlaciones fuertes o débiles
La recta de regresión de *y* sobre *x*
Utilización de la recta de regresión para realizar predicciones

1 Determina el tipo de correlación, si es que existe, entre las siguientes variables. Justifica tu respuesta.

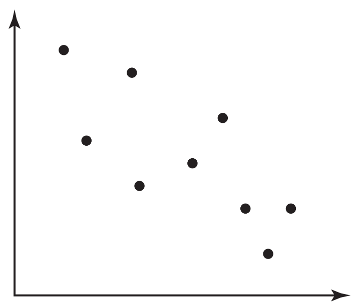
- **a** La altura y el peso de un niño.
- **b** Las notas de un alumno en un examen de Matemáticas y en un examen de Ciencias.
- **c** Las notas de un alumno en un examen de Matemáticas y en un examen de Plástica.
- **d** La temperatura exterior y la cantidad de paraguas vendidos.
- **e** Los cigarros que fuma una mujer durante su embarazo y el peso del recién nacido.
- **f** El número de personas que viven en un hogar y la cantidad de agua que se consume en el domicilio.
- **g** La altura y la inteligencia de una persona.
- **h** La cantidad de DVD que tiene una persona y las veces que va al cine.

2 Describe el tipo de correlación, si existe, que se representa en los siguientes diagramas de dispersión.

a



b



3 Un granjero quiere aumentar la producción de leche de sus vacas. Decide mezclar un forraje especial con el que ha utilizado siempre para ver si tiene algún efecto en la producción. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Forraje especial (%)	0	2	4	6	8	10	12	14
Producción de leche (litros)	2050	2100	2180	2230	2300	2360	2390	2470
Forraje especial (%)	16	18	20	22	24	26	28	30
Producción de leche (litros)	2540	2600	2650	2720	2800	2830	2850	2860

- **a** Dibuja un diagrama de dispersión en el que la producción esté en el eje *Y*.
- **b** Calcula la media del porcentaje de forraje especial ($\bar{x}$) y la media de producción de leche ($\bar{y}$).
- **c** Representa el punto ($\bar{x}$, $\bar{y}$) y escribe sus coordenadas.

Continúa en la página siguiente …

d Asumimos que la relación entre las dos variables es lineal. Dibuja una recta de ajuste óptimo que pase por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

e Utiliza la recta que has dibujado para estimar la producción que obtendría el granjero si utilizara un 15% del forraje especial.

f Escribe la ecuación de la recta de ajuste óptimo de la forma $y = mx + c$.

g Utiliza la ecuación de la recta de ajuste óptimo para extrapolar el resultado de la producción de leche que obtendría si el porcentaje de forraje especial fuese del 100%.

h ¿Crees que la respuesta del apartado **g** es válida? Justifica tu respuesta.

4 Un supermercado cuenta, en un intervalo de tiempo, la cantidad media de gente que hay en el establecimiento y el dinero recaudado en las cajas. Los resultados son los siguientes.

Cantidad media de gente en el supermercado	Dinero recaudado en las cajas (£)
72	3006
51	2021
12	812
108	3102
156	4671
92	4092
26	1125
48	1995
52	1991
61	2082
17	742
5	306
88	4128
16	738

a Utiliza la CG para hallar el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson.

b Explica el significado del resultado del apartado **a**.

5 Un camión sale de viaje con el depósito cargado con 1000 litros de combustible. Durante el viaje, el camionero va anotando los kilómetros recorridos y los litros de combustible que quedan en el depósito. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Distancia recorrida (km)	0	50	150	300	700	1000	2000	4000
Combustible en el depósito (litros)	1000	985	970	930	850	785	575	215

a Utiliza la CG para calcular la ecuación de la recta de regresión de y sobre x expresada como $y = mx + c$.

b Explica qué representa el valor de m en el contexto del problema.

c Utiliza la ecuación para hacer una estimación del combustible que quedaría en el tanque después de viajar 3000 km.

d Utiliza la ecuación para estimar cuántos kilómetros puede recorrer con 1000 litros de combustible.

4.4 La prueba χ^2 de la independencia entre dos variables

La prueba χ^2 de la independencia de dos variables: formulación de la hipótesis nula y la alternativa, niveles de significación, tablas de contingencia, frecuencias esperadas, grados de libertad, *p*-valor

1 La siguiente tabla de contingencia muestra los alumnos y alumnas que obtienen sobresaliente, aprobado o suspenso en un curso.

	Sobresaliente	Aprobado	Suspenso	Total
Alumnos	18	84	28	130
Alumnas	20	132	18	170
Total	38	216	46	300

a Determina los grados de libertad de los datos.

b Construye la tabla de las frecuencias esperadas si los resultados fueran independientes.

c Se cree que la probabilidad de suspender depende del género del alumno.

i Establece la hipótesis nula (H_0).

ii Establece la hipótesis alternativa (H_1).

d Utiliza la fórmula para calcular el valor de $\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ y comprobar la independencia de los resultados.

e Determina con un nivel de significación del 5% si el que un alumno suspenda depende en cierta medida de su género.

2 Unos investigadores quieren saber si a los alumnos les gustan diferentes géneros cinematográficos que a las alumnas. La siguiente tabla de contingencia muestra los resultados de la encuesta que se ha realizado para este estudio.

	Romance	Terror	Acción	Comedia	Total
Alumnos	3	14	15	18	50
Alumnas	25	15	10	30	80
Total	28	29	25	48	130

a Determina los grados de libertad de la tabla.

b Construye una tabla de contingencia con las frecuencias esperadas en el caso de que los resultados fueran independientes.

c Se cree que existe una diferencia entre los gustos de cine de los alumnos y los de las alumnas.

i Establece la hipótesis nula (H_0).

ii Establece la hipótesis alternativa (H_1).

d Calcula el valor de χ^2.

e Determina si los gustos cinematográficos son distintos para alumnos y alumnas con un nivel de significación del:

i 10% ii 5% iii 1%

Continúa en la página siguiente …

3 Los gestores de un complejo turístico quieren saber si existe relación entre las edades de sus clientes y su nivel de satisfacción con el complejo. Para ello realizan una encuesta en la que los clientes puntúan el complejo como «excelente», «bueno», «satisfactorio» o «mediocre». La siguiente tabla muestra los resultados de la encuesta.

	Excelente	**Bueno**	**Satisfactorio**	**Mediocre**
Menos de 16	10	21	23	6
16-25	6	11	12	4
26-55	7	25	12	20
Más de 55	8	38	40	19

a Establece la hipótesis nula.

b Calcula el valor de χ^2.

c Determina si la hipótesis nula se rechaza, con un nivel de significación del:

i 1% ii 5% iii 10%

5.1 Rectas

Ecuación de una recta en dos dimensiones: las ecuaciones $y = mx + c$ y $ax + bx + d = 0$
Pendiente, ordenada en el origen
El punto de intersección de dos rectas
Rectas con pendientes m_1 y m_2
Rectas paralelas $m_1 = m_2$
Rectas perpendiculares $m_1 \times m_2 = -1$

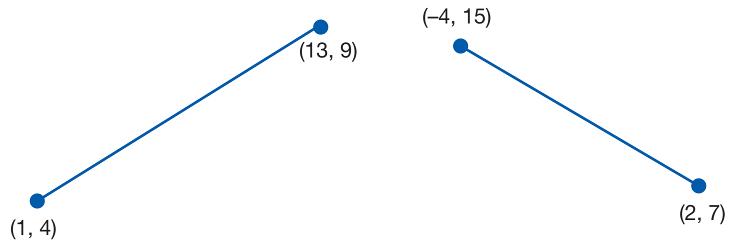
1 Calcula las pendientes de las rectas que pasan por los siguientes pares de coordenadas.

a (3, 5) y (5, 13) **b** (6, 1) y (10, –9)

2 Si m es la pendiente de una recta, calcula, en cada caso, la pendiente de la recta perpendicular.

a $m = 4$ **b** $m = -6$ **c** $m = \frac{2}{3}$ **d** $m = -1\frac{3}{4}$

3 Halla la longitud de los siguientes segmentos.



4 Calcula las coordenadas del punto medio de los segmentos del ejercicio **3**.

5 Las siguientes tablas muestran las coordenadas x e y de varios puntos de una recta. Utiliza las coordenadas de los puntos para deducir la ecuación de la recta y escríbela de la forma $y = mx + c$.

a

x	y
–2	–7
–1	–4
0	–1
1	2
2	5

b

x	y
–2	0
–1	0,5
0	1
1	1,5
2	2

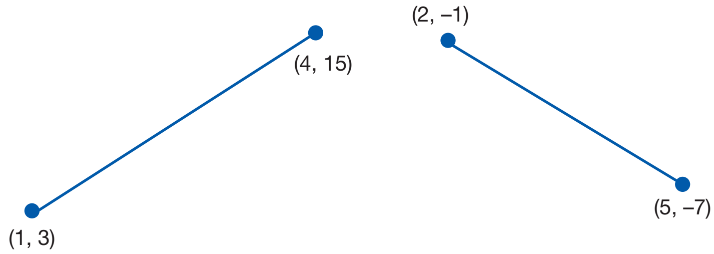
6 A partir de la ecuación deduce la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas.

a $y = x - 2$ **b** $y = -3x + 1$
c $2y - 4x + 6 = 0$ **d** $3y + 5x - 12 = 0$

Continúa en la página siguiente …

7 Calcula la ecuación de la recta que pasa por cada uno de los pares de puntos dados. Exprésala de la forma:

i $y = mx + c$ **ii** $ax + by + d = 0$



8 Representa las siguientes rectas e indica en qué puntos cortan con los ejes de coordenadas.

a $y = 2x - 4$ **b** $2x + 2y - 1 = 0$

9 Resuelve algebraica o gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

a $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 5y + 2x = 17 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

10 En una cafetería, tres tés (*t*) y un pastel (*p*) cuestan 4,40 \$. Y dos tés y tres pasteles cuestan 4,80 \$.

a Construye dos ecuaciones que reflejen la información del enunciado.

b Resuelve el sistema de ecuaciones que has creado y halla el precio de:

i un té **ii** un pastel

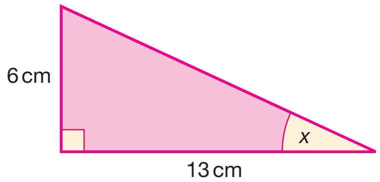
5.2 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Las razones seno, coseno y tangente para hallar lados y ángulos de triángulos rectángulos
Ángulos de elevación y depresión

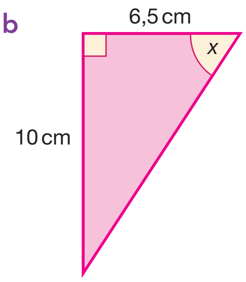
1 Copia el siguiente triángulo rectángulo y nombra los lados con respecto al ángulo *x* como «opuesto», «adyacente» e «hipotenusa».

2 Calcula el ángulo *x* en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

a

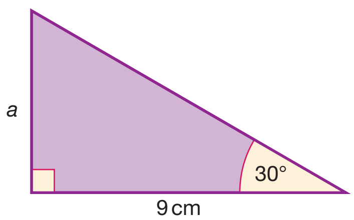


b

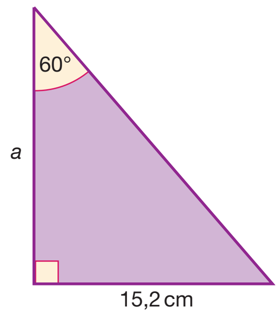


3 Calcula la longitud del lado *a* que se ha señalado en los siguientes triángulos rectángulos.

a



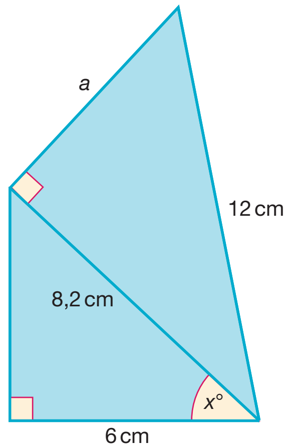
b



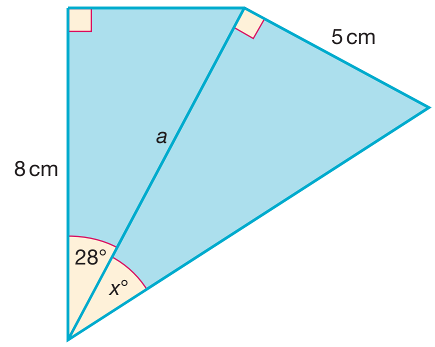
Continúa en la página siguiente …

4 Calcula la longitud del lado marcado como *a* y el ángulo *x* en cada uno de las siguientes figuras.

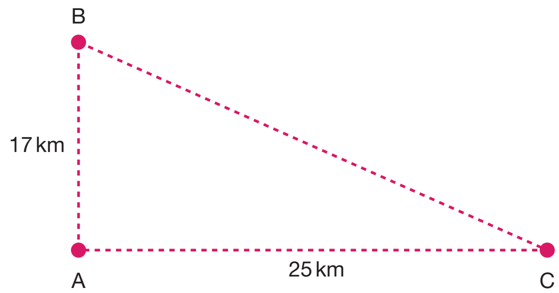
a



b



5 Tres ciudades (*A*, *B* y *C*) están situadas como se muestra en la figura. *B* está al norte de *A* y *C* está al este de *A*.

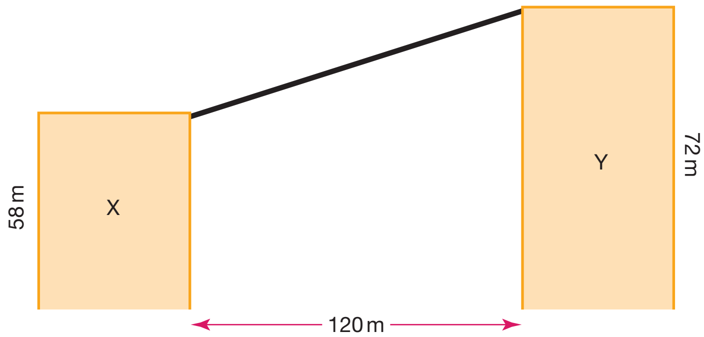


a Calcula la distancia *BC* y da el resultado con tres cifras significativas.

b ¿Cuál es el rumbo de *C* desde *B*?

Continúa en la página siguiente …

6 Dos torres (*X* e *Y*) están a 120 m de distancia. La altura de la torre *X* es de 58 m, y la altura de *Y* es de 72 m. Se instala una cuerda floja de *X* a *Y* como se muestra en la figura.

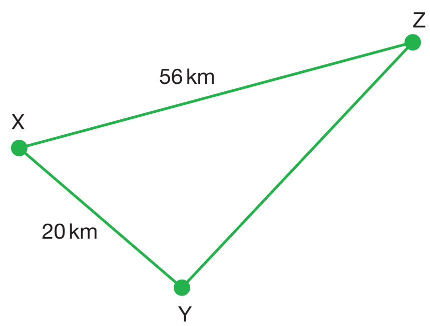


a Calcula el ángulo de elevación de la cuerda floja.

b Calcula la distancia que recorrerá un equilibrista para ir de *X* a *Y*.

7 Tres pueblos (*X*, *Y* y *Z*) se encuentran situados como se muestra en la figura. *X* está a 20 km al noroeste de *Y*. *Z* está al noreste de *Y*. La distancia *XZ* es de 56 km.

Calcula la distancia que hay entre los pueblos *Y* y *Z*.



5.3 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Uso del teorema de los senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

Uso del teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Uso de la fórmula del área de un triángulo cualquiera $= \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$

Representación de figuras con datos que se expresan en un enunciado

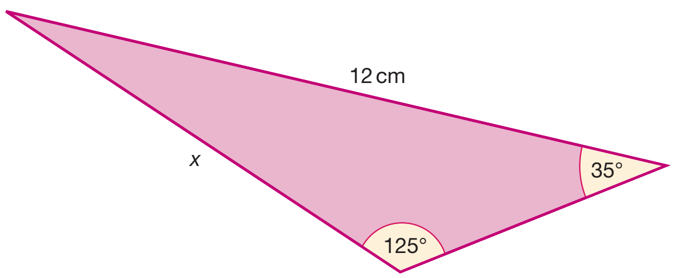
1 Halla todos los valores que puede tomar x, donde $0 \leq x \leq 180°$, para que las siguientes igualdades se cumplan.

a $\operatorname{sen} x = 0{,}65$ **b** $\operatorname{sen} x = 0{,}25$ **c** $\operatorname{sen} x = 1$ **d** $\operatorname{sen} x = 0$

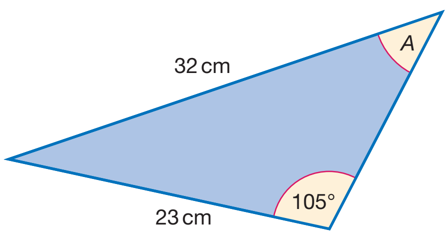
2 Halla todos los valores que puede tomar θ, donde $0 \leq \theta \leq 360°$ para que las siguientes igualdades se cumplan.

a $\cos\theta = 0{,}5$ **b** $\cos\theta = -0{,}4$ **c** $\cos\theta = -1$

3 Utiliza el teorema de los senos para calcular la longitud del lado x de la siguiente figura.



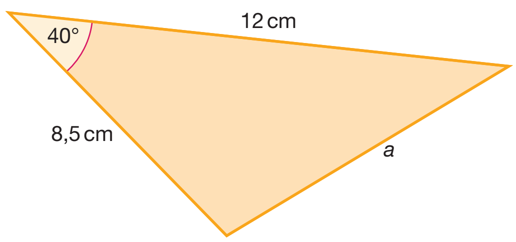
4 Halla cuánto mide el ángulo A del siguiente triángulo.



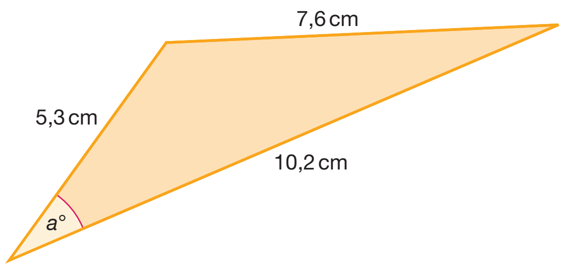
Continúa en la página siguiente …

5 Utiliza el teorema del coseno para calcular las medidas que se piden en cada caso.

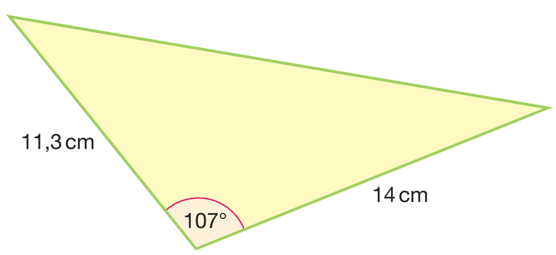
a Halla la longitud del lado *a*.



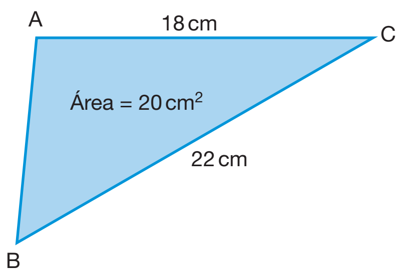
b Halla cuánto mide el ángulo *a*.



6 Calcula el área del siguiente triángulo.



7 Calcula cuánto mide el ángulo del vértice *C* del siguiente triángulo.



8 **a** Dibuja con regla y compás un triángulo *PQR* en el que $PQ = 6$ cm, $PR = 7$ cm y $QR = 9$ cm.

b Calcula la medida del ángulo *PRQ*.

5.4 y 5.5 Geometría de los cuerpos tridimensionales

Geometría de las figuras tridimensionales: cubos, ortoedros, prismas rectos, pirámides rectas, conos rectos, cilindros, esferas, semiesferas y sólidos generados con partes de estas figuras

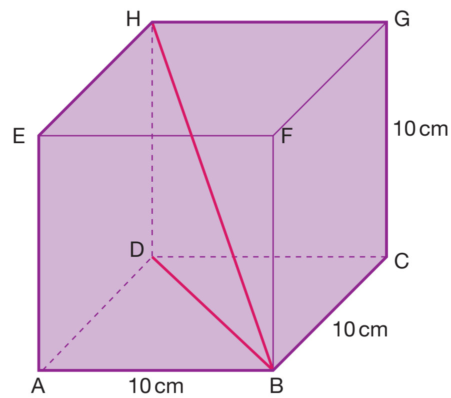
Distancia entre dos puntos; por ejemplo, entre dos vértices, entre un vértice y su punto medio o entre dos puntos medios

Ángulo comprendido entre dos rectas, ángulo formado por una recta y un plano

Volumen y área de los sólidos en el espacio del punto 5.4

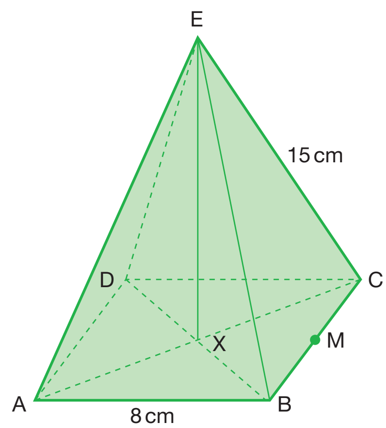
1 La longitud de las aristas del cubo de la figura miden 10 cm.
Calcula:

- **a** La longitud de *BD*.
- **b** La longitud de la diagonal *BH*.
- **c** El ángulo *DBH*.



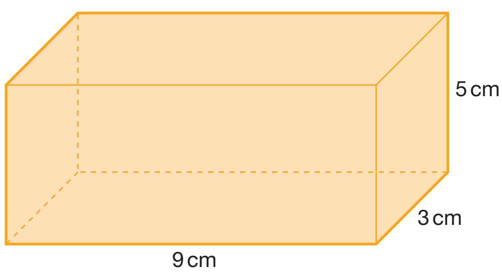
2 En la figura se muestra una pirámide cuadrangular recta; es decir, su base es un cuadrado y el vértice, *E*, está alineado verticalmente con el centro de la base *X*. Se llama *M* al punto medio de *CB*.
Calcula:

- **a** La longitud *CX*.
- **b** La altura de la pirámide, *EX*.
- **c** La distancia *XM*.
- **d** El ángulo que forman la cara *BCE* con la base de la pirámide.

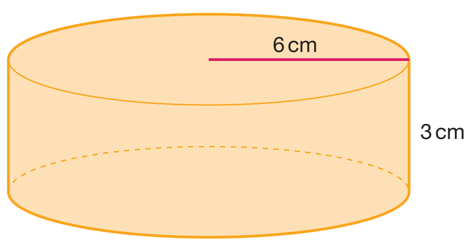


3 Calcula el área de la superficie de las siguientes figuras.

a



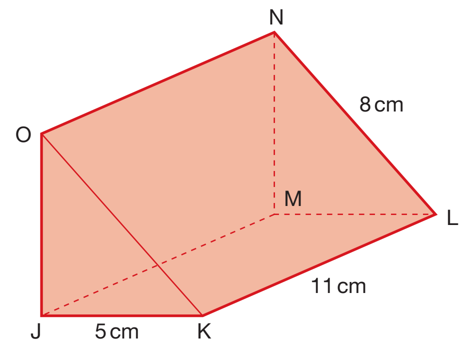
b



Continúa en la página siguiente …

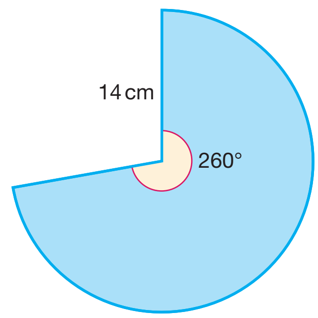
4 La figura muestra un prisma cuya base es un triángulo rectángulo.
Calcula:

a La longitud de *OJ*.
b El área total del prisma.
c El volumen del prisma.
d El ángulo que forma el segmento *OL* con la cara *JKLM*.

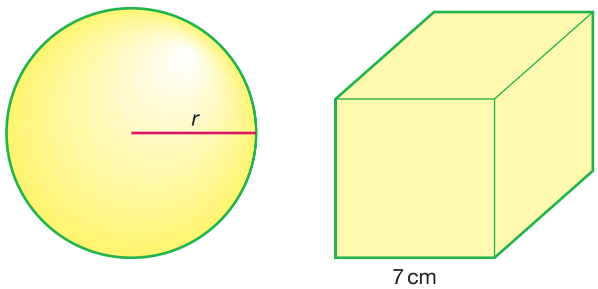


5 El siguiente sector tiene un radio de 14 cm y un ángulo central de 260°.
Calcula:

a La longitud del arco.
b El área del sector.

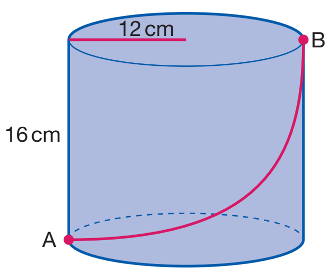


6 La esfera y el cubo de la figura tienen el mismo volumen.



Calcula el radio, *r*, de la esfera.

7 Dos puntos *A* y *B* se encuentran en las posiciones más alejadas de la superficie del cilindro, como muestra la figura.



a Calcula el perímetro de la base del cilindro.
b Se dibuja una línea que va desde *A* hasta *B* y representa la menor distancia posible entre *A* y *B* por la superficie del cilindro. Calcula la longitud de dicha línea.

6.3 Funciones cuadráticas y sus gráficas

Modelos cuadráticos
Funciones cuadráticas y sus gráficas (las parábolas): $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
Propiedades y elementos de la parábola: simetría, vértice y cortes con los ejes
Ecuación del eje de simetría, $x = -\dfrac{b}{2a}$

1 Para cada una de las funciones:

i Utiliza la CG para hacer una representación aproximada de la función.
ii Escribe las coordenadas de los cortes con el eje X.
iii Escribe las coordenadas del corte con el eje Y.

a $f(x) = x^2 - 9x + 20$ **b** $f(x) = x^2 - 3x - 18$
c $f(x) = (x - 4)^2$ **d** $f(x) = x^2 + 10x + 27$

2 Halla el eje de simetría de las siguientes parábolas.

a $y = x^2 - 2x$ **b** $y = -x^2 - 4x$
c $y = x(5 - x)$ **d** $y = -x^2 + 3x - 10$

3 Escribe una posible ecuación de segundo grado que tenga los siguientes ejes de simetría.

a $x = 6$ **b** $x = -5$

4 Factoriza las siguientes funciones cuadráticas.

a $f(x) = x^2 + 11x + 30$ **b** $f(x) = x^2 + 4x - 12$
c $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ **d** $f(x) = x^2 - 36$

5 Factoriza las siguientes ecuaciones de segundo y resuélvelas.

a $x^2 - 3x - 4 = 0$ **b** $x^2 - 2x - 24 = 0$
c $-x^2 + 10x - 16 = 0$ **d** $x^2 = 11x - 28$

6 Las siguientes ecuaciones de segundo grado están expresadas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

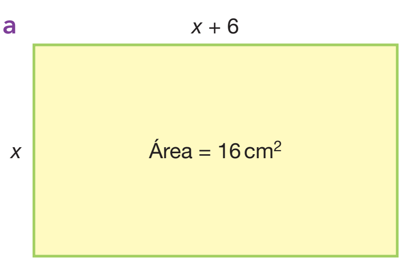
Resuélvelas utilizando la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

a $x^2 + 5x - 25 = 0$ **b** $x^2 + 9x - 24 = 0$
c $4x^2 + 8x + 3 = 0$ **d** $-x^2 + 9x - 15 = 0$

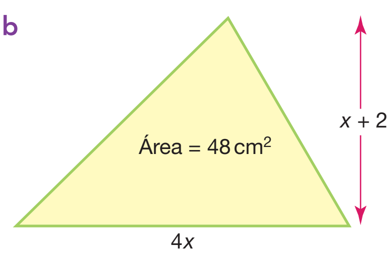
7 Para cada una de las siguientes figuras:

i Escribe una ecuación que exprese el área en función de x.
ii Resuelve la ecuación para hallar los posibles valores de x.

a



b



6.4 Funciones exponenciales y sus gráficas

Modelos exponenciales
Funciones exponenciales y sus gráficas: $f(x) = ka^x + c$, $a \in \mathbb{Q}^+$, $a \neq 1$, $k \neq 0$; $f(x) = ka^{-x} + c$, $a \in \mathbb{Q}^+$, $a \neq 1$, $k \neq 0$
Concepto y ecuación de asíntota horizontal

1 **i** Representa, ayudándote de una tabla de valores, las siguientes funciones exponenciales.

ii Halla las ecuaciones de sus asíntotas si las tienen.

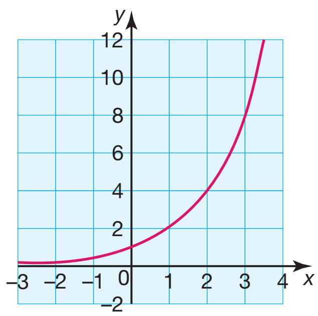
a $f(x) = 2^x + 1$ **b** $f(x) = -2^x + 2$ **c** $f(x) = 3^x - 3$

2 Un grifo gotea sobre un recipiente a un ritmo constante. El nivel de agua, *l*, del recipiente se mide en centímetros y viene dado por la ecuación $1 = 3^t + 5$, donde t es el tiempo en horas.

a Calcula qué nivel de agua tenía el recipiente al principio.
b Calcula el nivel de agua del recipiente a las 4 horas.
c Halla cuánto se tardará en alcanzar un nivel de 248 cm.
d Representa detalladamente la gráfica del nivel de agua durante las primeras 6 horas.
e A partir de la gráfica estima el tiempo que se ha tardado para alcanzar un nivel de agua de 1 m.

3 **a** Dibuja detalladamente la gráfica de $y = 5^x$ para valores entre -1 y 3.
b Utiliza la gráfica que has dibujado para hallar las soluciones aproximadas de estas ecuaciones.
i $5^x = 100$ **ii** $5^x = 50$

4 En la figura está representada la gráfica de la función $f(x) = 2^x$.



a Copia la gráfica y, en los mismos ejes, haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función $f(x) = 2^x + 3$. Escribe las fórmulas junto a sus curvas.
b En los mismos ejes haz una representación aproximada de la gráfica de $f(x) = -2^x + 6$ y escribe la fórmula junto a la curva.

5 El periodo de semidesintegración del plutonio 239 es de 24 000 años. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que 2 g de plutonio se reduzcan a 62,5 mg?

6.5 y 6.6 Representación detallada y precisa de gráficas

Modelos que se representan con este tipo de funciones: $f(x) = ax^m + bx^n + \ldots,\ m, n \in \mathbb{Z}$
Este tipo de funciones y sus gráficas
El eje *Y* como asíntota vertical
Representación detallada de funciones
Representación aproximada de una función a partir de la información dada
Paso de una gráfica de la CG al papel
Lectura, interpretación y realización de predicciones a partir de gráficos
Las funciones anteriores, además de sus sumas y restas
Resolución de ecuaciones con la CG, incluidas las ecuaciones generadas combinando las que se han visto anteriormente

Responde a estas cuestiones en los ejercicios 1 y 2:

a Halla la ecuación de las asíntotas que pueda tener.
b Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.
c Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función.
d Comprueba tu representación con la CG.

1 $y = \dfrac{1}{x - 5}$

2 $y = -\dfrac{1}{3x - 1} + 2$

Responde a estas cuestiones en los ejercicios 3 y 4:

a Halla la ecuación de las asíntotas horizontales y verticales que pueda tener.
b Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.
c Haz una representación de la gráfica de la función con la ayuda de tu CG.

3 $y = \dfrac{1}{(x + 2)(x - 3)}$

4 $y = -\dfrac{1}{2x^2 + x - 6}$

5 Para la ecuación $y = -2x^3 - 13x^2 - 13x + 10$:

  a Representa la función con la CG.
  b Halla las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.
  c Expresa la función de forma factorizada.

6 Utiliza la CG para resolver la ecuación $2x^2 - 11 = \dfrac{4}{x} - 5x$.

7.2 y 7.3 Derivada y pendiente de una curva en un punto

Regla de derivación de funciones de la forma $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$
Derivadas de las funciones de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$, donde todos los exponentes son enteros
Pendiente de una curva para un valor de x
Valor de x para una $f'(x)$ dada
Ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado
Ecuación de la recta perpendicular a la tangente en un punto dado (recta normal)

1 Halla la derivada con respecto a x de las siguientes funciones.

a $f(x) = x^2 + 3x - 4$ **b** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$

c $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ **d** $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - 1$

2 Halla la derivada de las siguientes expresiones.

a x^{-1} **b** $2x^{-3}$

c $x^{-2} + 2x^{-1} - 3$ **d** $\dfrac{3}{x^2}$

3 Halla la derivada con respecto a x, $f'(x)$, de las siguientes funciones.

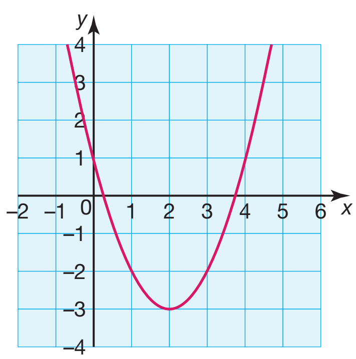
a $f(x) = x(x - 3)$ **b** $f(x) = 2x^2(x + 2)$
c $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ **d** $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 4)$

4 Halla la derivada de las siguientes expresiones.

a $\dfrac{2x^3 - x^2}{x}$ **b** $\dfrac{2x^5 - x^3}{3x^2}$

c $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^4}$ **d** $\dfrac{(x - 6)(2x^2 - 1)}{x}$

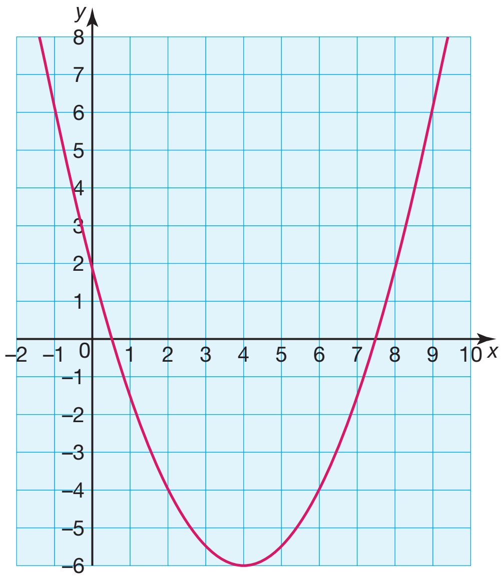
5 La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$.



a Halla la función de la pendiente, $f'(x)$.
b Calcula la pendiente de la curva cuando:
i $x = 3$ **ii** $x = 2$ **iii** $x = 0$

Continúa en la página siguiente …

6 La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$.



a Halla la función de la pendiente, $f'(x)$.

b Calcula los valores de x en los que la pendiente de la curva es:

i 0 **ii** 2 **iii** -5

7 Una curva tiene como ecuación $y = x^3 + 4x + 2$.

a Halla $\frac{dy}{dx}$.

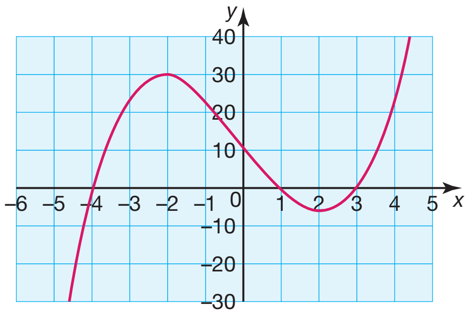
b Utiliza la respuesta al apartado **a** para encontrar el mínimo valor que puede tomar $\frac{dy}{dx}$. Justifica tu respuesta.

c Halla el valor o los valores de x en los que $\frac{dy}{dx}$ vale:

i 7 **ii** 4 **iii** 31

Continúa en la página siguiente …

8 En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 13x + 12$.



a Halla la derivada, $f'(x)$.

b Calcula la pendiente de la curva cuando $x = 3$.

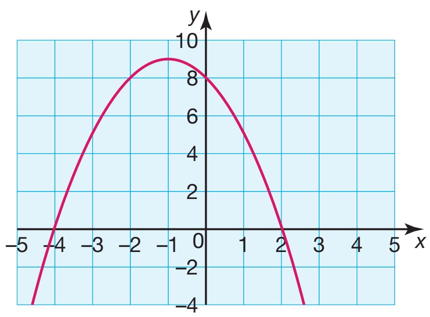
c Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (3, 0).

d Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (3, 0).

e Calcula la pendiente de la recta normal a la curva en el punto (3, 0).

f Halla la ecuación de la recta normal a la curva en el punto (3, 0) y exprésala de la forma $ax + by + c = 0$.

9 En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.



a Halla la derivada, $f'(x)$.

b Demuestra que los puntos $A(-2, 8)$ y $B(1, 5)$ pertenecen a la curva.

c Calcula la pendiente de la curva en los puntos A y B.

d Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto A.

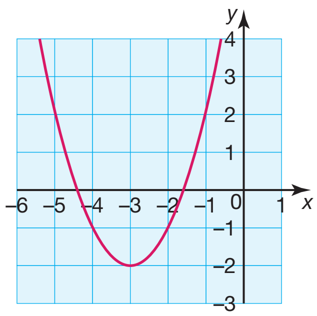
e Calcula la ecuación de la recta normal a la curva en el punto B.

f Calcula el punto de corte de la recta tangente a la curva en el punto A con la recta normal a la curva en el punto B.

7.4, 7.5 y 7.6 Crecimiento y decrecimiento, puntos singulares y optimización

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones
Interpretación gráfica de $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$
Valores de x en los que la pendiente de una curva es 0 (cero)
Solución de $f'(x) = 0$
Puntos singulares
Máximos y mínimos locales
Problemas de optimización

1 En la figura se muestra la función $f'(x) = x^2 + 6x + 7$.
Utiliza la gráfica para encontrar los intervalos de x en los que la función $f(x)$ es decreciente.



2 Para cada una de las siguientes funciones halla:

i $f'(x)$

ii Los intervalos de x en los que la función $f(x)$ es creciente.

a $f(x) = x^2 - 18$

b $f(x) = x^2 - 10x + 27$

c $f(x) = -x^2 + 8x - 10$

d $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

3 Demuestra que la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ es creciente en todos los valores de x.

4 Calcula el intervalo de valores que puede tomar k para que la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + kx$ sea creciente para todos los valores de x.

5 Para las funciones del tipo $f(x) = x^2 + bx + c$, halla:

a Cuántos puntos singulares tiene.

b De qué tipo son los puntos singulares o el punto singular.

6 Para la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 20x + 2$:

a Halla $f'(x)$

b Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.

c Explica el significado de la solución, o soluciones, al apartado **b** en relación con los puntos singulares.

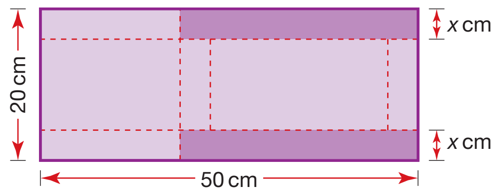
d Teniendo en cuenta la ecuación de la función, deduce de qué tipo son los puntos singulares, o punto singular. Justifica tu respuesta.

Continúa en la página siguiente …

7 Para la función $f(x) = x^3 - 12x - 5$:

- **a** Halla $f'(x)$.
- **b** Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.
- **c** Halla los puntos singulares.
- **d** Determina de qué tipo son los puntos singulares.
- **e** Halla el punto de corte de la gráfica con el eje Y.
- **f** Haz una representación aproximada de la gráfica.

8 Se cortan dos rectángulos de anchura x de un pliego rectangular de cartón de 20 cm por 50 cm, como se muestra en la figura. El resto del cartón es un ortoedro desplegado de x cm de altura.



- **a** Halla la expresión del ancho y el largo de la base del ortoedro, en función de x.
- **b** Demuestra que el volumen (V) del ortoedro es $2x^3 - 70x^2 + 500x$ cm^3.
- **c** Halla el valor de x para el que el volumen del ortoedro es máximo. Expresa el resultado con una cifra decimal.
- **d** Utilizando la respuesta del apartado **c**, halla el volumen máximo del ortoedro. Expresa el resultado redondeado a las unidades.
- **e** Demuestra que el valor que has hallado en el apartado **d** es un máximo.