OBJETIVO PAU

2025-2026

PREPÁRATE PARA LA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

BACHILLERATO COMUNIDAD DE MADRID

MATEMÁTICAS

ISBN 9788410965249

Accede a los contenidos de la materia en EduBook

BACHILLERATO

COMUNIDAD DE MADRID

OBJETIVO PAU

MATEMÁTICAS

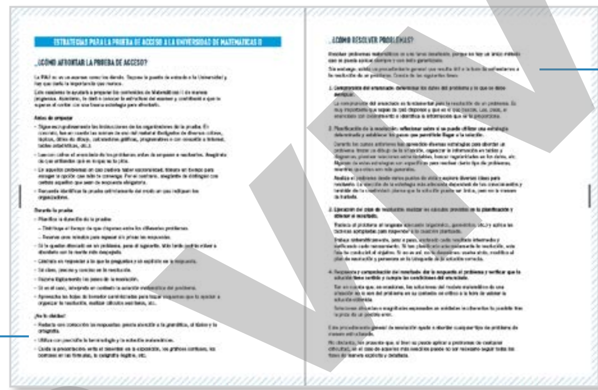
OBJETIVO PAU

El cuaderno de *Matemáticas II PAU* es una herramienta indispensable para garantizar el éxito a los estudiantes de 2.º de Bachillerato que afrontan la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU).

Sus contenidos responden a los contenidos, las competencias clave y los criterios de evaluación concretados en el currículum de la materia. Las actividades, tanto resueltas como propuestas, se ajustan a la tipología oficial de la PAU y facilitan la adquisición de las competencias específicas necesarias para superar la prueba.

_ESTRATEGIAS PARA LA PAU

Orientaciones para afrontar la PAU y procedimiento general de **resolución de problemas**.



Cómo afrontar la PAU.

Cómo resolver problemas.

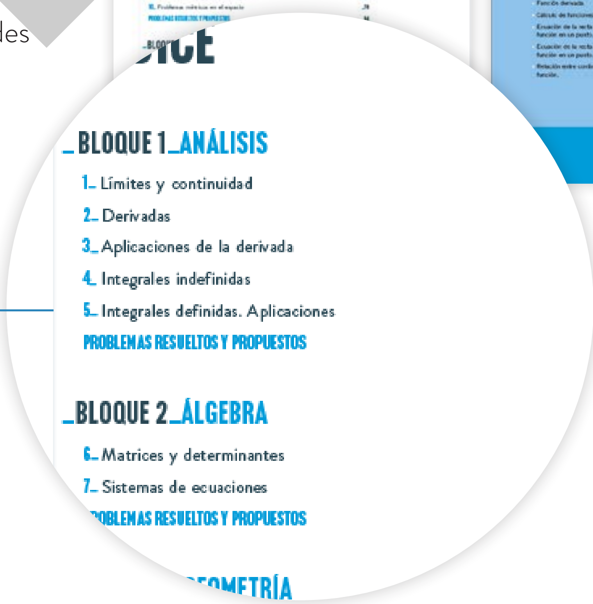
_ESTRUCTURA DE LOS CONTENIDOS

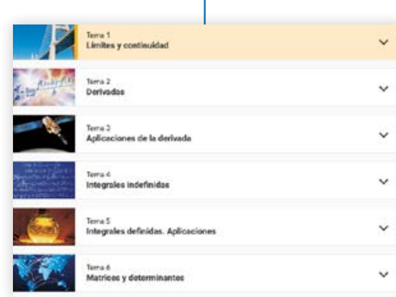
El cuaderno se organiza en **cuatro bloques de contenidos (Análisis, Álgebra, Geometría y Estadística y Probabilidad)**, relacionados con los contenidos del currículo de Matemáticas II.

Cada bloque integra las unidades temáticas correspondientes, actividades resueltas y actividades propuestas.

Relación con los contenidos.

Contenidos en Edubook.



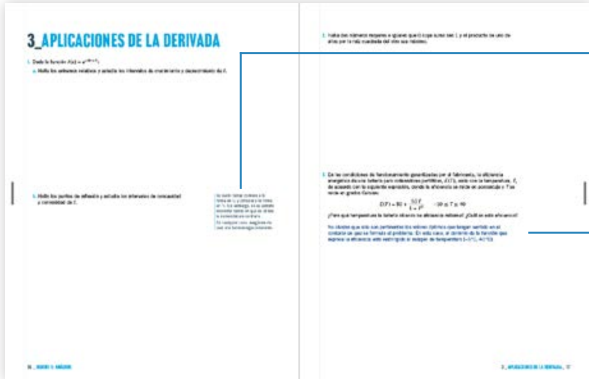


Organización por bloques de contenidos:

- Unidades temáticas
- Actividades resueltas
- Actividades propuestas

_UNIDADES TEMÁTICAS

Actividades concebidas para trabajar progresivamente los contenidos de cada bloque y enfocadas al desarrollo de las competencias y la consolidación de los contenidos curriculares.

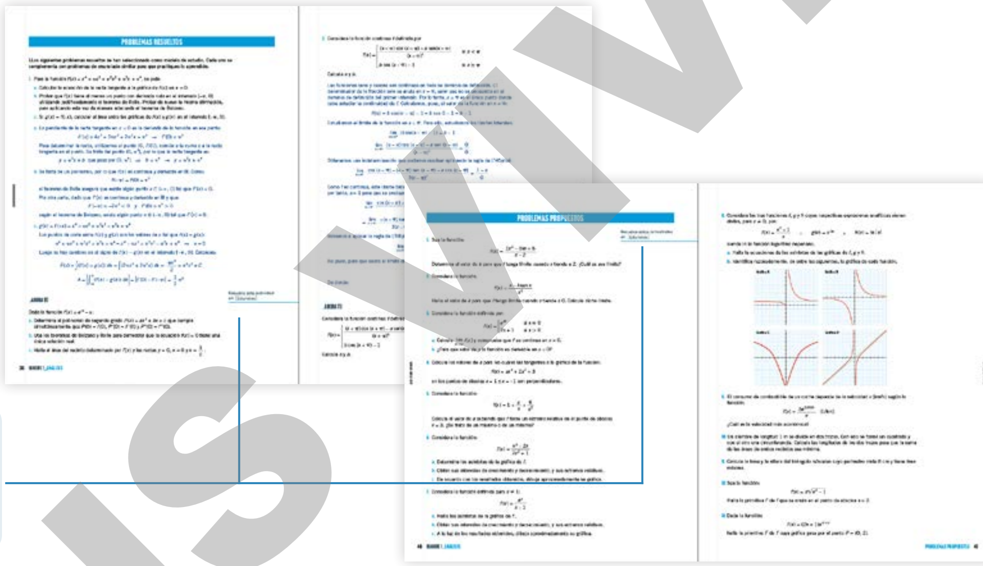


Pautas para guiar en la resolución de clases de actividades.

Orientaciones para guiar en la resolución de la actividad.

_PROBLEMAS MODELO

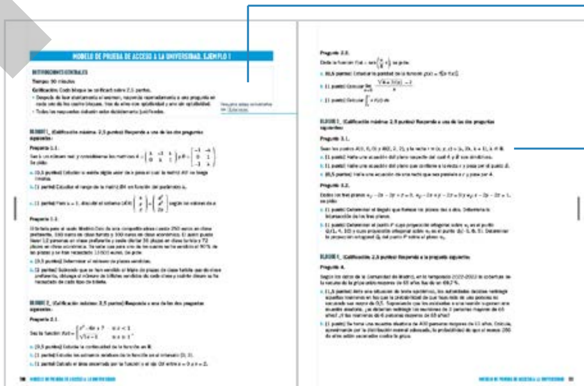
Actividades resueltas y propuestas basadas en los contenidos de cada bloque y diseñadas de acuerdo con la **tipología de actividades** de la PAU.



Edunotes para la resolución de las actividades que requieren de un desarrollo más extenso.

_MODELOS DE PRUEBA PAU

El objetivo de estos **modelos** es familiarizar al alumnado con la estructura del examen de la PAU de Matemáticas II en la Comunidad de Madrid.



Instrucciones para la resolución del examen.

Actividades en base al modelo PAU.

El examen constará de siete problemas distribuidos en cuatro bloques correspondientes a los contenidos de Álgebra, Geometría, Análisis y Estadística y Probabilidad. La evaluación de cada uno de los bloques tendrá la misma ponderación.

En uno de los cuatro bloques habrá una pregunta obligatoria de carácter competencial. La pregunta competencial puede corresponder a cualquiera de los cuatro bloques mencionados anteriormente.

En los tres bloques restantes se deberá responder exclusivamente a una pregunta de las dos dadas.

Accede a los contenidos de la materia en EduBook

_¿CÓMO AFRONTAR LA PRUEBA DE ACCESO?

La PAU no es un examen como los demás. Supone la puerta de entrada a la Universidad y hay que darle la importancia que merece.

Este cuaderno te ayudará a preparar los contenidos de Matemáticas II de manera progresiva. Asimismo, te dará a conocer la estructura del examen y contribuirá a que lo superes al contar con una buena estrategia para afrontarlo.

Antes de empezar

- Sigue escrupulosamente las instrucciones de los organizadores de la prueba. En concreto, ten en cuenta las normas de uso del material (bolígrafos de diversos colores, lápices, útiles de dibujo, calculadoras gráficas, programables o con conexión a Internet, tablas estadísticas, etc.).
- Lee con calma el enunciado de los problemas antes de empezar a resolverlos. Asegúrate de que entiendes qué es lo que se te pide.
- En aquellos problemas en que pudiera haber opcionalidad, tómate un tiempo para escoger la opción que más te convenga. Por el contrario, asegúrate de distinguir con certeza aquellos que sean de respuesta obligatoria.
- Recuerda identificar la prueba estrictamente del modo en que indiquen los organizadores.

Durante la prueba

- Planifica la duración de la prueba:
  – Distribuye el tiempo de que dispones entre los diferentes problemas.
  – Reserva unos minutos para repasar sin prisas las respuestas.
- Si te quedas atascado en un problema, pasa al siguiente. Más tarde podrás volver a abordarlo con la mente más despejada.
- Céntrate en responder a lo que te preguntan y sé explícito en la respuesta.
- Sé claro, preciso y conciso en la resolución.
- Razona lógicamente los pasos de la resolución.
- Si es el caso, interpreta en contexto la solución matemática del problema.
- Aprovecha las hojas de borrador suministradas para trazar esquemas que te ayuden a organizar la resolución, realizar cálculos auxiliares, etc.

¡No lo olvides!

- Redacta con corrección las respuestas: presta atención a la gramática, el léxico y la ortografía.
- Utiliza con precisión la terminología y la notación matemáticas.
- Cuida la presentación: evita el desorden en la exposición, los gráficos confusos, los borrones en las fórmulas, la caligrafía ilegible, etc.

_¿CÓMO RESOLVER PROBLEMAS?

Resolver problemas matemáticos es una tarea desafiante, porque no hay un único método que se pueda aplicar siempre y con éxito garantizado.

Sin embargo, existe un procedimiento general que resulta útil a la hora de enfrentarnos a la resolución de un problema. Consta de las siguientes fases:

1. **Comprensión del enunciado: determinar los datos del problema y lo que se debe averiguar.**

   La comprensión del enunciado es fundamental para la resolución de un problema. Es muy importante que sepas de qué dispones y qué es lo que buscas. Lee, pues, el enunciado con detenimiento e identifica la información que se te proporciona.

2. **Planificación de la resolución: reflexionar sobre si se puede utilizar una estrategia determinada y establecer los pasos que permitirán llegar a la solución.**

   Durante los cursos anteriores has aprendido diversas estrategias para abordar un problema: trazar un dibujo de la situación, organizar la información en tablas y diagramas, plantear relaciones entre variables, buscar regularidades en los datos, etc. Algunas de estas estrategias son específicas para resolver cierto tipo de problemas, mientras que otras son más generales.

   Analiza el problema desde varios puntos de vista y explora diversas ideas para resolverlo. La elección de la estrategia más adecuada dependerá de tus conocimientos y también de tu creatividad: piensa que la solución puede ser única, pero no la manera de hallarla.

3. **Ejecución del plan de resolución: realizar los cálculos previstos en la planificación y obtener el resultado.**

   Traduce el problema al lenguaje adecuado (algebraico, geométrico, etc.) y aplica las técnicas apropiadas para responder a la cuestión planteada.

   Trabaja sistemáticamente, paso a paso, anotando cada resultado intermedio y verificando cada razonamiento. Si has planificado adecuadamente la resolución, esta fase te conducirá al objetivo. Si no es así, no te desanimes: vuelve atrás, modifica el plan de resolución y persevera en la búsqueda de la solución correcta.

4. **Respuesta y comprobación del resultado: dar la respuesta al problema y verificar que la solución tiene sentido y cumple las condiciones del enunciado.**

   Ten en cuenta que, en ocasiones, las soluciones del modelo matemático de una situación no lo son del problema en su contexto: sé crítico a la hora de valorar la solución obtenida.

   Soluciones absurdas o magnitudes expresadas en unidades incoherentes te pondrán tras la pista de un posible error.

Este procedimiento general de resolución ayuda a abordar cualquier tipo de problema de manera estructurada.

No obstante, ten presente que, si bien se puede aplicar a problemas de cualquier dificultad, en el caso de aquellos más sencillos puede no ser necesario seguir todas las fases de manera explícita y detallada.

_ÍNDICE

_BLOQUE 1_ANÁLISIS

1_ Límites y continuidad _2
2_ Derivadas _10
3_ Aplicaciones de la derivada _16
4_ Integrales indefinidas _24
5_ Integrales definidas. Aplicaciones _30
PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS _36

_BLOQUE 2_ÁLGEBRA

6_ Matrices y determinantes _44
7_ Sistemas de ecuaciones _52
PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS _58

_BLOQUE 3_GEOMETRÍA

8_ Vectores en el espacio _66
9_ Puntos, rectas y planos en el espacio _72
10_ Problemas métricos en el espacio _78
PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS _84

_BLOQUE 4_ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

11_ Probabilidad _92
12_ Distribuciones de probabilidad _98
PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS _104

_MODELOS DE PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD _110

_BLOQUE 1
ANÁLISIS

CONTENIDOS RELACIONADOS

1_ LÍMITES Y CONTINUIDAD

- Cálculo de límites.
- Indeterminaciones.
- Técnicas de resolución de indeterminaciones.
- Aplicación del concepto de límite al estudio de la continuidad de una función.
- Aplicación del concepto de límite al estudio de las asíntotas de una función.
- Propiedades de las funciones continuas.

2_ DERIVADAS

- Derivada de una función en un punto.
- Función derivada.
- Cálculo de funciones derivadas.
- Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Ecuación de la recta normal a la gráfica de una función en un punto.
- Relación entre continuidad y derivabilidad de una función.

3_ APLICACIONES DE LA DERIVADA

- Determinación de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
- Determinación de los extremos de una función.
- Determinación de los intervalos de concavidad y de convexidad de una función.
- Resolución de problemas de optimización.
- Regla de l'Hôpital.
- Estudio de la gráfica de una función.

4_ INTEGRALES INDEFINIDAS

- Función primitiva.
- Integral indefinida.
- Determinación de la primitiva cuya gráfica pasa por un punto dado.
- Técnicas de cálculo de integrales indefinidas.

5_ INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

- Regla de Barrow.
- Cálculo de áreas mediante integrales definidas.

1_LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. La complejidad computacional de un programa informático se puede definir como el número de operaciones elementales que, como máximo, efectúa para procesar un número n de datos.

Supón que tenemos dos programas, P_1 y P_2, cuyas complejidades computacionales respectivas son $C_1(n) = n\sqrt[4]{n^3} + 100$ y $C_2(n) = n^2 - 2n + 25$. Comprueba que, cuando n es muy grande, P_1 es computacionalmente más eficiente que P_2.

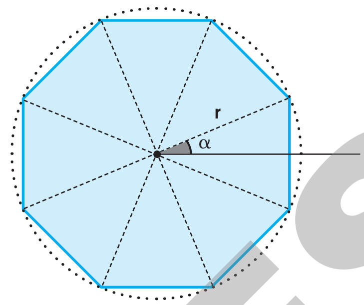
2. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}{(x-1)^{3/5}}$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x}$

3. Supón un polígono regular de un número n cualquiera de lados inscrito en una circunferencia de radio r.



a. Expresa el valor del ángulo α en función del número de lados, n.

b. Demuestra, utilizando la trigonometría, que la expresión $A(n) = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \text{sen}\, \frac{2\pi}{n}$ corresponde al área de un polígono regular de n lados.

c. Demuestra que el área $A(n)$ se aproxima al área del círculo cuando n aumenta. Para ello, haz el cambio $x = \frac{2\pi}{n}$ y ten en cuenta que se cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} A(n) = \lim_{x \to 0} A(x)$$

4. Un analista financiero prevé que la evolución del precio de las acciones de una compañía en la Bolsa de Nueva York vendrá dado mañana por la siguiente función:

$$B(t) = \begin{cases} 100 + mt - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 100 + 2t^2 & \text{si } 3 < t \le 6{,}5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido desde la apertura de la sesión bursátil, medido en horas, y $B(t)$ es el precio de las acciones, medido en dólares.

¿Para qué valor de m el precio de las acciones es continuo en $t = 3$?

En muchos contextos, aunque las magnitudes involucradas sean discretas (unidades monetarias, períodos financieros, etc.), es común utilizar, por sencillez, modelos matemáticos basados en funciones reales de variable real.

En estos casos, una vez obtenidos los resultados continuos, suelen expresarse de acuerdo con la naturaleza discreta del problema.

5. ¿Para qué valor de k la función $f(x) = \begin{cases} k(x+1)\,e^{5x} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{(x+1)\,\text{sen}\,x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$?

6. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

¿Para qué valores de *a* y *b* la función es continua en todo su dominio?

Para que una función definida a trozos sea continua en todo su dominio, ha de ser continua en cada uno de los intervalos de definición.

En este caso, el valor de abscisa que anula el denominador en la expresión del tercer trozo, $x = 1$, no condiciona la continuidad de la función, puesto que no pertenece a su intervalo de definición, $(2, +\infty)$.

Basta, pues, con que estudies aquí la continuidad de la función en los puntos que separan los trozos.

7. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^8 - x^5}{x^6 - 1}$. Razona si alguna de las discontinuidades es evitable.

Utiliza la terminología precisa al referirte a cada tipo de discontinuidad:

- Evitable
- De primera especie o de salto (finito o infinito).
- De segunda especie o esencial.

8. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a. ¿Es continua la función en cada uno de los tramos? Razónalo.

b. ¿Es suficiente el análisis del apartado anterior para saber si la función *f* es continua?

c. ¿Tiene puntos de discontinuidad la función *f*? En caso de que los tenga, indica cuáles son estos puntos y de qué tipo son las discontinuidades.

9. La función que expresa los ingresos de una empresa, en miles de euros, es $f(x) = -x^2 + 10x$, siendo x el número de años que han pasado desde su fundación. Justifica que en algún momento entre el quinto y el octavo año los ingresos ascendieron a 20 000 €.

Razona la respuesta a partir del teorema de los valores intermedios o de Darboux, que establece que una función continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

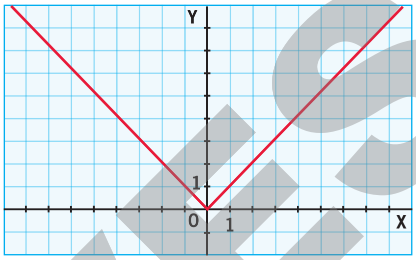
10. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x}$, halla el dominio y las asíntotas de su gráfica.

11. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, halla el dominio y las asíntotas de su gráfica.

12. Dada la función $f(x) = xe^{1/x}$, halla el dominio y las asíntotas de su gráfica.

2_DERIVADAS

1. Sea la función valor absoluto, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, cuya gráfica se muestra a la derecha.



Razona si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

A. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

B. La función es continua en $x = 0$.

C. La función es derivable en $x = 0$.

Recuerda que, si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto, pero que el recíproco no es necesariamente cierto.

Tenlo en cuenta al estudiar puntos angulosos o puntos de retroceso.

2. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}$

b. $f(x) = 2e^{x-1}\ln(x-1)$

c. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$