OBJETIVO PAU 2025-2026

PREPÁRATE PARA LA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

BACHILLERATO COMUNITAT VALENCIANA

MATEMÁTICAS

ISBN 9788410965263

9 788410 965263 020637

Accede a los saberes básicos de la materia en EduBook

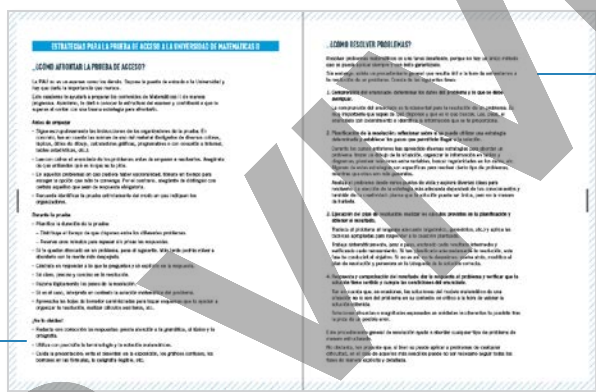
OBJETIVO PAU

El cuaderno de *Matemáticas II PAU* es una herramienta indispensable para garantizar el éxito a los estudiantes de 2.º de Bachillerato que afrontan la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU).

Sus contenidos responden a los saberes básicos, las competencias clave y los criterios de evaluación concretados en el currículum de la materia. Las actividades, tanto resueltas como propuestas, se ajustan a la tipología oficial de la PAU y facilitan la adquisición de las competencias específicas necesarias para superar la prueba.

_ESTRATEGIAS PARA LA PAU

Orientaciones para afrontar la PAU y procedimiento general de **resolución de problemas**.



Cómo afrontar la PAU.

Cómo resolver problemas.

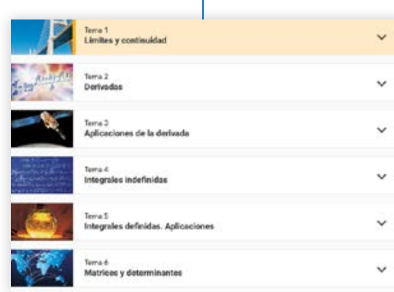
_ESTRUCTURA DE LOS CONTENIDOS

El cuaderno se organiza en **cuatro bloques de contenidos (Análisis, Álgebra, Geometría y Estadística y Probabilidad)**, relacionados con los saberes básicos del currículo de Matemáticas II.

Cada bloque integra las unidades temáticas correspondientes, actividades resueltas y actividades propuestas.

Relación con los saberes básicos.

Saberes básicos en Edubook.

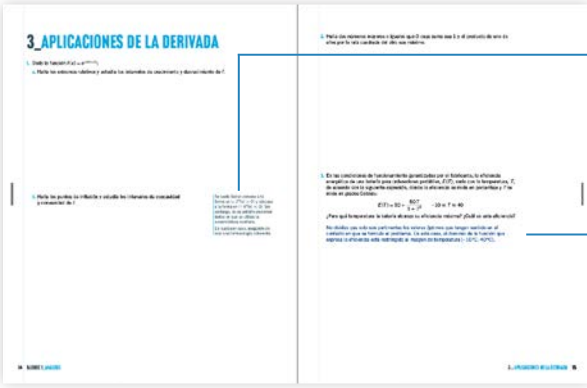


Organización por bloques de contenidos:

- Unidades temáticas
- Actividades resueltas
- Actividades propuestas

_UNIDADES TEMÁTICAS

Actividades concebidas para trabajar progresivamente los contenidos de cada bloque y enfocadas al desarrollo de las competencias y la consolidación de los saberes.

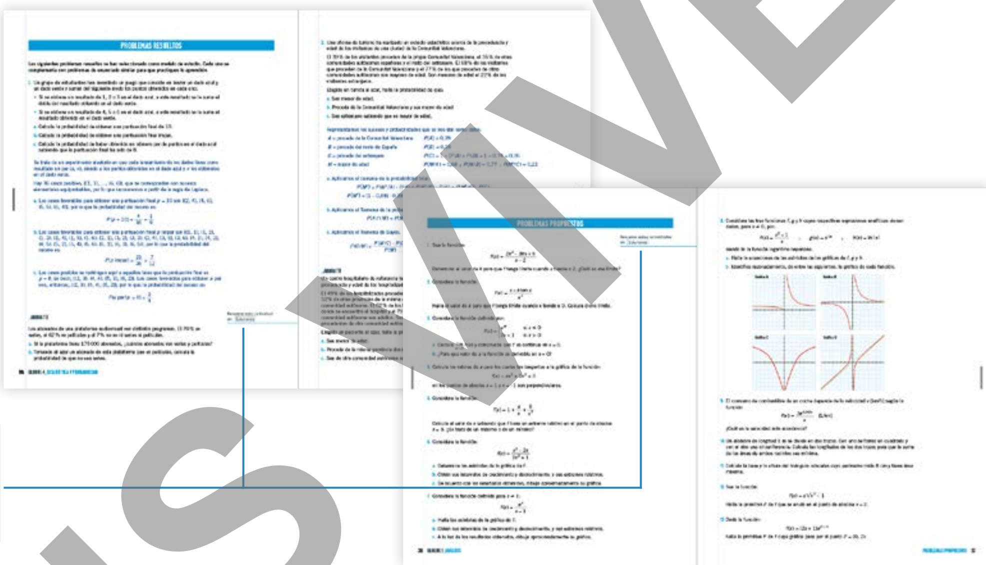


Pautas para guiar en la resolución de clases de actividades.

Orientaciones para guiar en la resolución de la actividad.

_PROBLEMAS MODELO

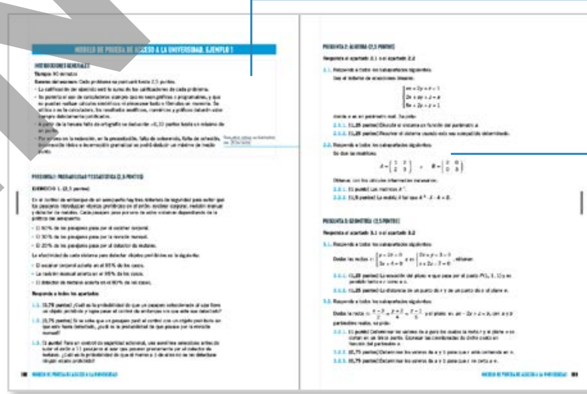
Actividades resueltas y propuestas basadas en los contenidos de cada bloque y diseñadas de acuerdo con la **tipología de actividades** de la PAU.



Edunotes para la resolución de las actividades que requieren de un desarrollo más extenso.

_MODELOS DE PRUEBA PAU

El objetivo de estos **modelos** es familiarizar al alumnado con la estructura del examen de la PAU de Matemáticas II en la Comunitat Valenciana.



Instrucciones para la resolución del examen.

Actividades con base en el modelo PAU.

El examen constará de cuatro preguntas, puntuadas cada una con 2,5 puntos.

Cada pregunta corresponderá a uno de los cuatro bloques siguientes: Probabilidad y Estadística, Álgebra, Análisis y Geometría.

- La primera pregunta será del tipo competencial y tendrá carácter obligatorio. Esta pregunta no contendrá apartados optativos y corresponderá al bloque de Probabilidad y Estadística.
- Las otras tres preguntas constarán de varios apartados, con posibilidad de elección.

Accede a los saberes básicos de la materia en

EduBook

_¿CÓMO AFRONTAR LA PRUEBA DE ACCESO?

La PAU no es un examen como los demás. Supone la puerta de entrada a la Universidad y hay que darle la importancia que merece.

Este cuaderno te ayudará a preparar los contenidos de Matemáticas II de manera progresiva. Asimismo, te dará a conocer la estructura del examen y contribuirá a que lo superes al contar con una buena estrategia para afrontarlo.

Antes de empezar

- Sigue escrupulosamente las instrucciones de los organizadores de la prueba. En concreto, ten en cuenta las normas de uso del material (bolígrafos de diversos colores, lápices, útiles de dibujo, calculadoras gráficas, programables o con conexión a Internet, tablas estadísticas, etc.).
- Lee con calma el enunciado de los problemas antes de empezar a resolverlos. Asegúrate de que entiendes qué es lo que se te pide.
- En aquellos problemas en que pudiera haber opcionalidad, tómate un tiempo para escoger la opción que más te convenga. Por el contrario, asegúrate de distinguir con certeza aquellos que sean de respuesta obligatoria.
- Recuerda identificar la prueba estrictamente del modo en que indiquen los organizadores.

Durante la prueba

- Planifica la duración de la prueba:
  – Distribuye el tiempo de que dispones entre los diferentes problemas.
  – Reserva unos minutos para repasar sin prisas las respuestas.
- Si te quedas atascado en un problema, pasa al siguiente. Más tarde podrás volver a abordarlo con la mente más despejada.
- Céntrate en responder a lo que te preguntan y sé explícito en la respuesta.
- Sé claro, preciso y conciso en la resolución.
- Razona lógicamente los pasos de la resolución.
- Si es el caso, interpreta en contexto la solución matemática del problema.
- Aprovecha las hojas de borrador suministradas para trazar esquemas que te ayuden a organizar la resolución, realizar cálculos auxiliares, etc.

¡No lo olvides!

- Redacta con corrección las respuestas: presta atención a la gramática, el léxico y la ortografía.
- Utiliza con precisión la terminología y la notación matemáticas.
- Cuida la presentación: evita el desorden en la exposición, los gráficos confusos, los borrones en las fórmulas, la caligrafía ilegible, etc.

_¿CÓMO RESOLVER PROBLEMAS?

Resolver problemas matemáticos es una tarea desafiante, porque no hay un único método que se pueda aplicar siempre y con éxito garantizado.

Sin embargo, existe un procedimiento general que resulta útil a la hora de enfrentarnos a la resolución de un problema. Consta de las siguientes fases:

1. **Comprensión del enunciado: determinar los datos del problema y lo que se debe averiguar.**

   La comprensión del enunciado es fundamental para la resolución de un problema. Es muy importante que sepas de qué dispones y qué es lo que buscas. Lee, pues, el enunciado con detenimiento e identifica la información que se te proporciona.

2. **Planificación de la resolución: reflexionar sobre si se puede utilizar una estrategia determinada y establecer los pasos que permitirán llegar a la solución.**

   Durante los cursos anteriores has aprendido diversas estrategias para abordar un problema: trazar un dibujo de la situación, organizar la información en tablas y diagramas, plantear relaciones entre variables, buscar regularidades en los datos, etc. Algunas de estas estrategias son específicas para resolver cierto tipo de problemas, mientras que otras son más generales.

   Analiza el problema desde varios puntos de vista y explora diversas ideas para resolverlo. La elección de la estrategia más adecuada dependerá de tus conocimientos y también de tu creatividad: piensa que la solución puede ser única, pero no la manera de hallarla.

3. **Ejecución del plan de resolución: realizar los cálculos previstos en la planificación y obtener el resultado.**

   Traduce el problema al lenguaje adecuado (algebraico, geométrico, etc.) y aplica las técnicas apropiadas para responder a la cuestión planteada.

   Trabaja sistemáticamente, paso a paso, anotando cada resultado intermedio y verificando cada razonamiento. Si has planificado adecuadamente la resolución, esta fase te conducirá al objetivo. Si no es así, no te desanimes: vuelve atrás, modifica el plan de resolución y persevera en la búsqueda de la solución correcta.

4. **Respuesta y comprobación del resultado: dar la respuesta al problema y verificar que la solución tiene sentido y cumple las condiciones del enunciado.**

   Ten en cuenta que, en ocasiones, las soluciones del modelo matemático de una situación no lo son del problema en su contexto: sé crítico a la hora de valorar la solución obtenida.

   Soluciones absurdas o magnitudes expresadas en unidades incoherentes te pondrán tras la pista de un posible error.

Este procedimiento general de resolución ayuda a abordar cualquier tipo de problema de manera estructurada.

No obstante, ten presente que, si bien se puede aplicar a problemas de cualquier dificultad, en el caso de aquellos más sencillos puede no ser necesario seguir todas las fases de manera explícita y detallada.

_ÍNDICE

_BLOQUE 1_ANÁLISIS

_BLOQUE 2_ÁLGEBRA

_BLOQUE 3_GEOMETRÍA

_BLOQUE 4_ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

_BLOQUE 1
ANÁLISIS

SABERES RELACIONADOS

1_ LÍMITES Y CONTINUIDAD

- Cálculo de límites.
- Indeterminaciones.
- Técnicas de resolución de indeterminaciones.
- Aplicación del concepto de límite al estudio de la continuidad de una función.
- Aplicación del concepto de límite al estudio de las asíntotas de una función.
- Propiedades de las funciones continuas.

2_ DERIVADAS

- Derivada de una función en un punto.
- Función derivada.
- Cálculo de funciones derivadas.
- Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Ecuación de la recta normal a la gráfica de una función en un punto.
- Relación entre continuidad y derivabilidad de una función.

3_ APLICACIONES DE LA DERIVADA

- Determinación de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
- Determinación de los extremos de una función.
- Determinación de los intervalos de concavidad y de convexidad de una función.
- Resolución de problemas de optimización.
- Regla de l'Hôpital.
- Estudio de la gráfica de una función.

4_ INTEGRALES INDEFINIDAS

- Función primitiva.
- Integral indefinida.
- Determinación de la primitiva cuya gráfica pasa por un punto dado.
- Técnicas de cálculo de integrales indefinidas.

5_ INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

- Regla de Barrow.
- Cálculo de áreas mediante integrales definidas.

1_LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. La complejidad computacional de un programa informático se puede definir como el número de operaciones elementales que, como máximo, efectúa para procesar un número n de datos.

Supón que tenemos dos programas, P_1 y P_2, cuyas complejidades computacionales respectivas son $C_1(n) = n\sqrt[4]{n^3} + 100$ y $C_2(n) = n^2 - 2n + 25$. Comprueba que, cuando n es muy grande, P_1 es computacionalmente más eficiente que P_2.

2. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}{(x-1)^{3/5}}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x}$

3. Un analista financiero prevé que la evolución del precio de las acciones de una compañía en la Bolsa de Nueva York vendrá dado mañana por la siguiente función:

$$B(t) = \begin{cases} 100 + mt - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 100 + 2t^2 & \text{si } 3 < t \le 6{,}5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido desde la apertura de la sesión bursátil, medido en horas, y $B(t)$ es el precio de las acciones, medido en dólares.

¿Para qué valor de m el precio de las acciones es continuo en $t = 3$?

En muchos contextos, aunque las magnitudes involucradas sean discretas (unidades monetarias, períodos financieros, etc.), es común utilizar, por sencillez, modelos matemáticos basados en funciones reales de variable real.

En estos casos, una vez obtenidos los resultados continuos, suelen expresarse de acuerdo con la naturaleza discreta del problema.

4. ¿Para qué valor de k la función $f(x) = \begin{cases} k(x+1)\,e^{5x} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{(x+1)\,\text{sen}\,x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$?

5. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

¿Para qué valores de a y b la función es continua en todo su dominio?

Para que una función definida a trozos sea continua en todo su dominio, ha de ser continua en cada uno de los intervalos de definición.

En este caso, el valor de abscisa que anula el denominador en la expresión del tercer trozo, $x = 1$, no condiciona la continuidad de la función, puesto que no pertenece a su intervalo de definición, $(2, +\infty)$.

Basta, pues, con que estudies aquí la continuidad de la función en los puntos que separan los trozos.

6. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^8 - x^5}{x^6 - 1}$. Razona si alguna de las discontinuidades es evitable.

Utiliza la terminología precisa al referirte a cada tipo de discontinuidad:

- Evitable
- De primera especie o de salto (finito o infinito).
- De segunda especie o esencial.

7. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a. ¿Es continua la función en cada uno de los tramos? Razónalo.

b. ¿Es suficiente el análisis del apartado anterior para saber si la función f es continua?

c. ¿Tiene puntos de discontinuidad la función f? En caso de que los tenga, indica cuáles son estos puntos y de qué tipo son las discontinuidades.

8. La función que expresa los ingresos de una empresa, en miles de euros, es $f(x) = -x^2 + 10x$, siendo x el número de años que han pasado desde su fundación. Justifica que en algún momento entre el quinto y el octavo año los ingresos ascendieron a 20 000 €.

Razona la respuesta a partir del teorema de los valores intermedios o de Darboux, que establece que una función continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

9. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x}$, halla el dominio y las asíntotas de su gráfica.

2_DERIVADAS

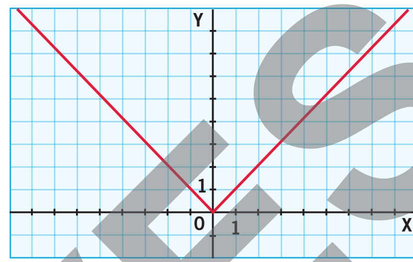
1. Sea la función valor absoluto, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, cuya gráfica se muestra a la derecha.

Razona si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

A. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

B. La función es continua en $x = 0$.

C. La función es derivable en $x = 0$.



Recuerda que, si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto, pero que el recíproco no es necesariamente cierto.

Tenlo en cuenta al estudiar puntos angulosos o puntos de retroceso.

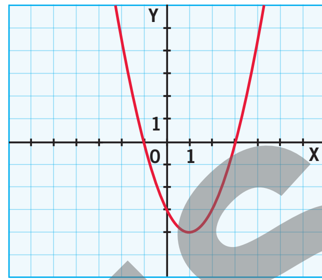
2. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}$

b. $f(x) = 2e^{x-1} \ln(x-1)$

c. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

3. Sea la función f cuya gráfica se muestra a la derecha:



a. Razona si hay algún punto en que la derivada sea 0.

Piensa en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b. Razona si hay algún par de puntos cuyas derivadas sean valores opuestos.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x}$. ¿En qué puntos, si existen, la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $-2x + y = 0$?

5. Considera la función $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Halla las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,\ f(-2))$ y $(2,\ f(2))$.

6. ¿Para qué valor de a la función $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$?

7. Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$:

a. Halla, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente de la recta tangente es $m = 1$.

b. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

8. Considera la función $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a. Sabiendo que f es derivable en todo su dominio, determina los valores de m y n.

b. En el caso $m = 2$ y $n = -7$, halla la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Recuerda la relación que hay entre la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, m_t, y la pendiente de la recta normal a la curva en ese punto, m_n:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

9. Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + p}{x - q}$, con $x \neq q$.

a. Calcula p y q para que la gráfica de f pase por el punto $(1,-2)$ y tenga como asíntota oblicua la recta $y = x + 4$.

b. En el caso $p = 5$ y $q = 4$, obtén las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f que pasan por el punto de abscisa $x = 0$.

3_APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. Dada la función $f(x) = e^{-x(x+2)}$:

a. Halla los extremos relativos y estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b. Halla los puntos de inflexión y estudia los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Se suele llamar *convexa* a la forma en $\cup$ ($f''(x) > 0$) y *cóncava* a la forma en $\cap$ ($f''(x) < 0$). Sin embargo, no es extraño encontrar textos en que se utiliza la nomenclatura contraria.

En cualquier caso, asegúrate de usar una terminología coherente.

2. Halla dos números mayores o iguales que 0 cuya suma sea 1 y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

3. En las condiciones de funcionamiento garantizadas por el fabricante, la eficiencia energética de una batería para ordenadores portátiles, $E(T)$, varía con la temperatura, T, de acuerdo con la siguiente expresión, donde la eficiencia se mide en porcentaje y T se mide en grados Celsius:

$$E(T) = 50 + \frac{50\,T}{1 + T^2} \qquad -10 \leq T \leq 40$$

¿Para qué temperatura la batería alcanza su eficiencia máxima? ¿Cuál es esta eficiencia?

No olvides que solo son pertinentes los valores óptimos que tengan sentido en el contexto en que se formula el problema. En este caso, el dominio de la función que expresa la eficiencia está restringido al margen de temperatura [−10 °C, 40 °C].

4. La prueba de monitorización de cierto fármaco consiste en medir la cantidad de principio activo en sangre durante las 5 h siguientes a la administración de cierta dosis del medicamento a un paciente. La experiencia ha determinado que esta cantidad viene dada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

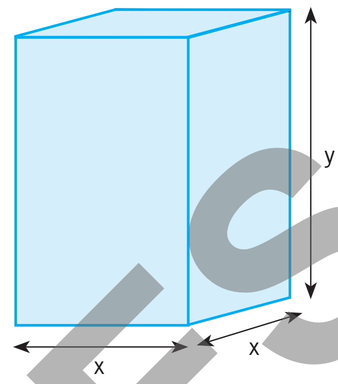
donde $f(x)$ representa la concentración en sangre del principio activo (medido en nanogramos por decilitro, ng/dL) y x representa el tiempo trascurrido (medido en horas, h) desde la administración del medicamento.

a. Durante el período que dura la prueba, ¿la concentración en sangre del principio activo varía manera continua?

b. ¿La concentración en sangre del principio activo alcanza el máximo en algún momento? Si es así, ¿cuándo?

c. Si la máxima concentración en sangre del principio activo que se considera terapéuticamente segura es de 100 ng/dL, ¿corre algún riesgo el paciente con la dosis del medicamento administrada?

5. Con el objetivo de reducir el coste de envasado, una cooperativa aceitera quiere diseñar una lata en forma de prisma de base cuadrada que contenga un volumen de 1 dm^3 y requiera la cantidad mínima de chapa.

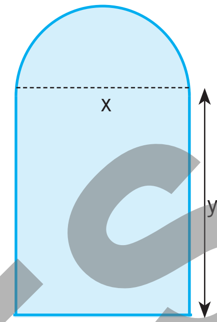


a. De acuerdo con el diagrama, determina la función *f* que expresa el área de la superficie del envase en función de *x*.

b. Halla los valores de *x* e *y* que minimizan el área de chapa empleada en cada envase. ¿Cuál es esta cantidad mínima de chapa?

c. Determina el coste de la chapa necesaria para fabricar 500 latas de aceite, sabiendo que el material tiene un precio de 1 €/dm^2.

6. Una ventana normanda tiene, de acuerdo con el diagrama, forma de rectángulo rematado por un semicírculo.



a. Sabiendo que, por razones arquitectónicas, el marco de cierta ventana normanda ha de medir 10 m de perímetro, halla la expresión $A(x)$ que proporciona el área de la ventana en función de su anchura x.

b. La ventana que permite una mayor iluminación de las estancias es la de mayor área. Calcula el valor de x para el cual el área de la ventana sea máxima.

c. Obtén el valor del área máxima y especifica las dimensiones de la ventana.

7. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$.

En el estudio completo de la gráfica de una función, se suelen analizar las siguientes características: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, regiones de existencia, simetrías, periodicidad, continuidad y derivabilidad, asíntotas y ramas infinitas, extremos y monotonía, y puntos de inflexión y curvatura.

No obstante, a menudo con solo considerar algunas de ellas suele bastar para trazar la gráfica con suficiente detalle.

4_INTEGRALES INDEFINIDAS

1. De todas las primitivas de la función $f(x) = \sec^2 x \cdot \text{tg}\, x$, determina aquella cuya gráfica pasa por el punto $P\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$.

2. Justifica que $F(x) = \ln(\text{sen}\, x)$ es una primitiva de la función $f(x) = \text{cotg}\, x$ en $(0, \pi)$. Halla la primitiva cuya gráfica corta el eje de abscisas en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

3. Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$ a la curva de una función f sabiendo que se cumple lo siguiente:

- La segunda derivada de f es 3.
- La gráfica de f pasa por el punto (2, 7).
- La pendiente de la gráfica de f en el punto de tangencia con la recta es 12.

No olvides emplear la terminología con precisión: no es lo mismo **una** primitiva F de f que el conjunto de **todas** las primitivas F de f. Es en este útimo caso que hablamos de *integral indefinida*.

4. Halla la expresión de la función f sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ es $2x + y - 8 = 0$ y que $f''(x) = -24x - 12$.

5. Halla f sabiendo que $f'(x) = 4x^3 f(x)$ y que $f(0) = 1$.

6. Halla f sabiendo que $f'(x) = x^2 e^x$ y que su gráfica pasa por el punto $P(0, 2)$.

7. Halla f sabiendo que $f''(x) = x \ln x$, $f'(1) = 1$ y $f(e) = \dfrac{e}{4}$.

8. Un laboratorio de investigaciones biomédicas ha determinado que la velocidad de crecimiento de un determinado cultivo de microorganismos se ajusta a la expresión $p'(t) = ae^{bt}$, donde $p(t)$ es la función que expresa la población de microorganismos (en miles) en función del tiempo (en minutos). Halla $p(t)$ si la población inicial es $p(0) = 1$.

9. Dadas las funciones $f(x) = 2x + 6$ y $g(x) = x^2 - 3x$, calcula $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

10. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f:

a. Halla los extremos relativos y estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b. Halla los puntos de inflexión y estudia los intervalos de concavidad y convexidad de f.

11. En la gestión económica de las empresas se tiene en cuenta la función de coste total de un producto, $C_T(x)$, que expresa la relación entre el coste total de producción, C_T (en unidades monetarias), y la cantidad producida, x (en unidades de producto).

Por otro lado, se considera también la función de coste marginal, $C_M(x)$, que se relaciona con la función de coste total del siguiente modo:

$$C_M(x) = C_T'(x)$$

Un ingeniero de organización industrial ha determinado que, en una explotación de áridos, la fabricación de arena para mortero se ajusta a la función de coste marginal $C_M(x) = 0{,}02x + 0{,}025$, donde C_M se mide en miles de euros (€) y x se mide en toneladas (t).

a. Halla la función de coste total de la producción de arena sabiendo que el coste fijo de la explotación es de 50 000 €.

b. Calcula el coste total de producir 1 500 t de arena.

c. Halla el coste medio por tonelada de producir 1 500 t de arena.