

far 

ESO | ANDALUCÍA

 Vicens Vives

ESENCIAL

MATEMÁTICAS

2



COMPROMETIDOS CON LOS
OBJETIVOS DE DESARROLLO
SOSTENIBLE



ACTIVA todos los
recursos digitales en

edubook

Matemáticas

ESENCIAL

ESO

VICENS VIVES

 Vicens Vives

far 
ESO | ANDALUCÍA

Autores:

Luis Pancorbo Palenzuela

Profesor de Secundaria de Matemáticas

Ginés Ruiz Bueno

Catedrático de Secundaria de Matemáticas

Manuel Forero Piulestán

Profesor de Secundaria de Matemáticas

Ilustrado por: 123RF, Adobe Stock, agefotostock y Gzz (CC BY-SA 4.0).

Agradecemos la posibilidad de utilizar el material fotográfico a:

©ESA (T.02 Despegue cohete)

©EASP (T.08 Pirámide 2ª)

©STANFORD UNIVERSITY (T.09 Maryam Mirzajani)

- Las actividades contenidas en este libro han de realizarse en un cuaderno aparte.
- Los espacios incluidos en las actividades son meramente indicativos y su finalidad es didáctica.

Un ECOSISTEMA de PRODUCTOS,
SOLUCIONES y EXPERIENCIAS
para la TRANSFORMACIÓN EDUCATIVA

Desplegamos todo nuestro potencial para desarrollar el nuevo modelo educativo del s. XXI.

Servicio personalizado de atención al docente para dar respuesta a los desafíos de la educación.



SOSTENIBILIDAD

Incluimos un planteamiento transversal de **sostenibilidad y desarrollo humano** vinculado y comprometido con los **Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)** de la **Agenda 2030**.



APRENDIZAJE ACTIVO

Fomentamos que el alumnado sea capaz de **analizar, razonar y cuestionar** la información con una **actitud activa, autónoma y comprometida**.

SITUACIONES Y RETOS

Partimos de **situaciones de aprendizaje** donde poder contextualizar los **saberes básicos, involucrando activamente al alumnado** y fomentando su participación en la resolución de retos (ABR) y problemas (ABP).

RESPECTO E IGUALDAD

Fomentamos el **respeto y la igualdad de género** para desmontar prejuicios, estereotipos y actitudes de carácter discriminatorio.

SABERES BÁSICOS

Proponemos un aprendizaje integrado de **saberes básicos y competencias** para que el alumnado alcance de forma plena el **perfil de salida** de la etapa educativa.

DIVERSIDAD CULTURAL

Ofrecemos la posibilidad de ver y **entender el mundo** desde perspectivas diferentes a través de la **diversidad lingüística**, lo que supone una oportunidad para el desarrollo personal y social.

EDUCACIÓN INCLUSIVA

Aplicamos el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) para una **educación inclusiva**, ofreciendo un enfoque **personalizado y adaptado** para garantizar el éxito educativo de todo el alumnado.

DIGITALIZACIÓN Y SEGURIDAD

Desarrollamos la **competencia digital** y el **uso seguro y consciente** de la información.

Cómo es este proyecto

El modelo pedagógico del Proyecto Faro Esencial se basa en el aprendizaje experiencial. Las actividades y tareas propuestas:

- Están diseñadas siguiendo los criterios del **Diseño Universal de Aprendizaje (DUA)**.
- Están pensadas y clasificadas según los **procesos cognitivos que trabajan**. De este modo, el alumnado puede poner en práctica las **competencias específicas** y los **saberes propios** del área.
- Favorecen la adquisición de **valores positivos**, el **pensamiento crítico** y la conciencia sobre los **Objetivos de Desarrollo Sostenible**.
- En base al aprendizaje experiencial se pone el acento en la **resolución de problemas de manera colaborativa** a través de la **indagación** y la **comunicación**.

Secuencia didáctica

MOTIVAMOS

Partimos de una **situación de aprendizaje**, donde se plantea un **reto colectivo** relacionado con el entorno real del alumnado, que contextualiza las competencias y los saberes que se van a desarrollar.

ACTIVAMOS

Planteamos situaciones y actividades generales para **recordar conocimientos previos** necesarios para avanzar en la unidad didáctica.

¿Aceptas el reto?

Presentación del **reto colectivo** que se deberá superar aplicando las competencias y saberes adquiridos.



Aprenderemos a... Se indican los saberes que se trabajarán en la unidad.

Iconografía DUA

A lo largo de todo el proyecto se desarrollan y explicitan las pautas DUA de **implicación**, **representación** y **acción**, para favorecer la atención a la diversidad del alumnado.

Implicación



Actividades de trabajo colaborativo.



Actividades que trabajan la observación y reflexión de emociones.

Representación



Videos con la resolución detallada de actividades.



Actividades que implican buscar e interpretar información en Internet.

Acción



Actividades para realizar con la ayuda de la calculadora, tanto de bolsillo como en línea (CalcMe, GeoGebra...).



Actividades de multinivelación que permiten la adaptación a las capacidades e intereses del alumnado.



Actividades que ofrecen diferentes formas de presentar las tareas para adaptarse a las competencias del alumnado.

ESTRUCTURAMOS

Mediante explicaciones, actividades y tareas se consigue la consolidación de los saberes y las competencias.

This block contains several pages of educational material. The first page is titled '1. Números naturales, Divisores y múltiplos' and includes sections for '¿Sabes con los números naturales?', '¿Cómo se hallan los divisores y los múltiplos de un número natural?', and 'Comunicar procesos y resultados'. The second page is '7. Resolución de problemas' with 'Practicamos' and 'Sintesis' sections. The third page is 'Sintesis' for 'Números naturales, Divisores y múltiplos'. The fourth page is 'Practicamos' with 'Resolución de problemas' and 'Sintesis' sections.

This block contains two worksheets. The first is 'Codificación de colores' with a color wheel and text about color coding. The second is 'Me comprometo con los ODS' with a list of 17 Sustainable Development Goals and their descriptions.

EXPLORAMOS

A través de la lectura, la observación, la búsqueda de información y la realización de actividades sencillas, se explora la presencia de las matemáticas en el entorno contextualizando los aprendizajes trabajados, de forma autónoma, a lo largo de la unidad. El planteamiento colaborativo de muchas de las situaciones y el trabajo de los ODS favorece la cooperación y la toma de conciencia de la vinculación de lo aprendido con la realidad.

APLICAMOS

Actividades clasificadas según su nivel de dificultad (• bajo, •• medio) atendiendo al criterio de **multinivelación** para facilitar la atención a la diversidad. Con la **resolución del reto** se consigue transferir todo lo trabajado a la situación de aprendizaje planteada al inicio de la unidad didáctica. Las distintas fases del reto ayudan a pautar la aplicación de los saberes y las competencias y a reflexionar sobre lo aprendido.

This block contains two worksheets. The first is 'Ejercicio mis saberes' with a table of numbers and operations. The second is 'Situación de aprendizaje' with a diagram and text about a challenge.

EVALUAMOS

Ofrece herramientas de evaluación. Una serie de **actividades** para **comprobar la adquisición de los saberes y competencias** y un **diario de aprendizaje** con una **rúbrica** para valorar el propio proceso de aprendizaje.

This block contains two worksheets. The first is 'Evolvo mi aprendizaje' with a table for self-evaluation. The second is 'Cuadro de aprendizaje' with a table for tracking progress.

Elementos digitales

edubook

Activa la licencia digital y accede a:











- Contenidos digitales
- Vídeos
- Actividades digitales

tiching.com

Enlaces a Internet que permiten ampliar algún contenido del tema.









ÍNDICE

	MOTIVAMOS	ACTIVAMOS	ESTRUCTURAMOS
	Situación de aprendizaje	Rutina de pensamiento	Saberes básicos
1. ¿Positivo o negativo? Números naturales y números enteros pág. 2	¿Aceptas el reto? ¿Organizamos una competición de juegos de ingenio?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Números naturales. Divisores y múltiplos 2. Números primos y números compuestos 3. m.c.d. y m.c.m. 4. Números enteros 5. Operaciones con números enteros (I) 6. Operaciones con números enteros (II) 7. Resolución de problemas
2. ¿Cuántas partes? Fracciones y decimales pág. 24	¿Aceptas el reto? ¿Planeamos una jornada gastronómica?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Fracciones. Fracciones equivalentes 2. Representación y ordenación de fracciones 3. Operaciones con fracciones 4. Operaciones combinadas con fracciones 5. Fracciones y decimales (I) 6. Fracciones y decimales (II) 7. Aproximación 8. Resolución de problemas
3. ¿Y los números muy grandes? Potencias y raíces pág. 48	¿Aceptas el reto? ¿Construimos un Sistema Solar a escala?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Potencias de exponente natural 2. Potencias de exponente entero no natural 3. Raíz cuadrada 4. Operaciones combinadas 5. Notación científica 6. Resolución de problemas
4. ¿Cuánto vale x? Ecuaciones y sistemas pág. 68	¿Aceptas el reto? ¿Investigamos acerca de los números poligonales?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expresiones algebraicas 2. Polinomios 3. Productos notables 4. Ecuaciones 5. Ecuaciones de primer grado 6. Ecuaciones de segundo grado 7. Sistemas de ecuaciones lineales 8. Resolución algebraica de sistemas 9. Resolución gráfica de sistemas 10. Resolución de problemas
5. Si aumenta, ¿disminuye? Proporcionalidad numérica pág. 96	¿Aceptas el reto? ¿Planificamos una jornada tecnológica?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Magnitudes directamente proporcionales 2. Porcentajes (I) 3. Porcentajes (II) 4. Magnitudes inversamente proporcionales 5. Repartos proporcionales directos e inversos 6. Proporcionalidad compuesta 7. Resolución de problemas
6. ¿Agudo u obtuso? Elementos geométricos pág. 118	¿Aceptas el reto? ¿Evaluamos la calidad acústica y visual de un auditorio?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Elementos geométricos 2. Ángulos 3. Mediatriz y bisectriz 4. Medida de ángulos 5. Operaciones con medidas angulares (I) 6. Operaciones con medidas angulares (II) 7. Circunferencia 8. Resolución de problemas

EXPLORAMOS	APLICAMOS		EVALUAMOS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	ODS
	Ejercito mis saberes	Situación de aprendizaje			
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> Codificación de colores Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 3: Salud y bienestar 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Organizamos una competición de juegos de ingenio?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> Unidades de temperatura Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 8: Trabajo decente y crecimiento económico 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Planeamos una jornada gastronómica?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	 
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué son los fractales? Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 2: Hambre cero 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Construimos un Sistema Solar a escala?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	 
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> ¿De qué está hecha esta prenda? Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 6: Agua limpia y saneamiento 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Investigamos acerca de los números poligonales?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar elementos matemáticos Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	  
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> ¿Hay proporción en la oxidación? Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 5: Igualdad de género 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Planificamos una jornada tecnológica?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	
Actividades STEM <ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo medimos el tiempo? Me comprometo con los ODS <ul style="list-style-type: none"> ODS 12: Producción y consumo responsables 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	¡Resuelvo el reto! ¿Evaluamos la calidad acústica y visual de un auditorio?	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	

ÍNDICE

	MOTIVAMOS	ACTIVAMOS	ESTRUCTURAMOS
	Situación de aprendizaje	Rutina de pensamiento	Saberes básicos
7. ¿Es el círculo un polígono? Figuras planas <p>pág. 142</p>	¿Aceptas el reto? ¿Analizamos la proporción cordobesa?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Polígonos 2. Polígonos convexos 3. Triángulos 4. Elementos notables de un triángulo 5. Teorema de Pitágoras 6. Cuadriláteros 7. Construcciones geométricas 8. Círculo y figuras circulares 9. Resolución de problemas
8. ¿Grande o pequeño? Perímetros y áreas <p>pág. 168</p>	¿Aceptas el reto? ¿Organizamos una competición con un tangram gigante?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Perímetro y área de una figura plana 2. Perímetro y área de cuadriláteros 3. Perímetro y área del triángulo 4. Perímetro y área de polígonos regulares 5. Longitud de la circunferencia 6. Área del círculo y de figuras circulares 7. Área de figuras compuestas 8. Resolución de problemas
9. Cuántas caras ves? Poliedros <p>pág. 192</p>	¿Aceptas el reto? ¿Construimos una maqueta?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Poliedros 2. Poliedros regulares 3. Prismas (I) 4. Prismas (II) 5. Pirámides (I) 6. Pirámides (II) 7. Resolución de problemas
10. ¿Es la esfera un poliedro? Cuerpos redondos <p>pág. 216</p>	¿Aceptas el reto? ¿Descubrimos la relación entre los balones de fútbol y las matemáticas?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Cuerpos de revolución 2. Cilindro 3. Cono 4. Esfera 5. Cuerpos y superficies esféricas 6. Resolución de problemas
11. ¿Igual o parecido? Proporcionalidad geométrica <p>pág. 236</p>	¿Aceptas el reto? ¿Valoramos una oferta de alquiler?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Proporcionalidad de segmentos. Teorema de Tales 2. Figuras semejantes 3. Triángulos semejantes 4. Teoremas de la altura y del cateto 5. Escalas 6. Cuerpos semejantes. Relaciones métricas 7. Resolución de problemas
12. ¿Dependiente o independiente? Funciones <p>pág. 258</p>	¿Aceptas el reto? ¿Proponemos una excursión al departamento de Ciencias?	<ul style="list-style-type: none"> • Observo • Reflexiono • Concluyo 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Concepto de función 2. Características de una función (I) 3. Características de una función (II) 4. Análisis de la gráfica de una función 5. Funciones lineales y funciones afines 6. Ecuación de una recta 7. Funciones cuadráticas 8. Resolución de problemas

EXPLORAMOS	APLICAMOS		EVALUAMOS	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	ODS
	Ejercito mis saberes	Situación de aprendizaje			
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> La Estación Espacial Internacional <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Analizamos la proporción cordobesa?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Analizar las soluciones de un problema Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> Recubrimientos con césped <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 15: Vida de ecosistemas terrestres 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Organizamos una competición con un tangram gigante?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	 
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Qué es un escutoide? <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 12: Producción y consumo responsables 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Construimos una maqueta?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar elementos matemáticos Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> Instalación de equipamiento urbano <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 4: Educación de calidad 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Descubrimos la relación entre los balones de fútbol y las matemáticas?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Conectar elementos matemáticos Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	 
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> Foto, foto, foto... <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Valoramos una oferta de alquiler?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	
<p>Actividades STEM</p> <ul style="list-style-type: none"> Crecimiento infantil <p>Me comprometo con los ODS</p> <ul style="list-style-type: none"> ODS 13: Acción por el clima 	<ul style="list-style-type: none"> Practico Resuelvo problemas Actividades PISA 	<p>¡Resuelvo el reto!</p> <p>¿Proponemos una excursión al departamento de Ciencias?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Autoevaluación Valoro lo aprendido 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar, modelizar y resolver problemas Formular y comprobar conjeturas Utilizar el pensamiento computacional Conectar elementos matemáticos Conectar con otras materias Representar procesos y resultados Comunicar procesos y resultados Identificar y gestionar emociones Desarrollar destrezas sociales 	

1

¿Positivo o negativo?

Números naturales y números enteros

Para manejar altitudes y profundidades, distinguir temperaturas sobre cero y bajo cero, diferenciar el dinero que se tiene y el que se debe, y operar con estas cantidades, no basta con los números naturales, hay que utilizar los números enteros.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¿Aceptas el reto?

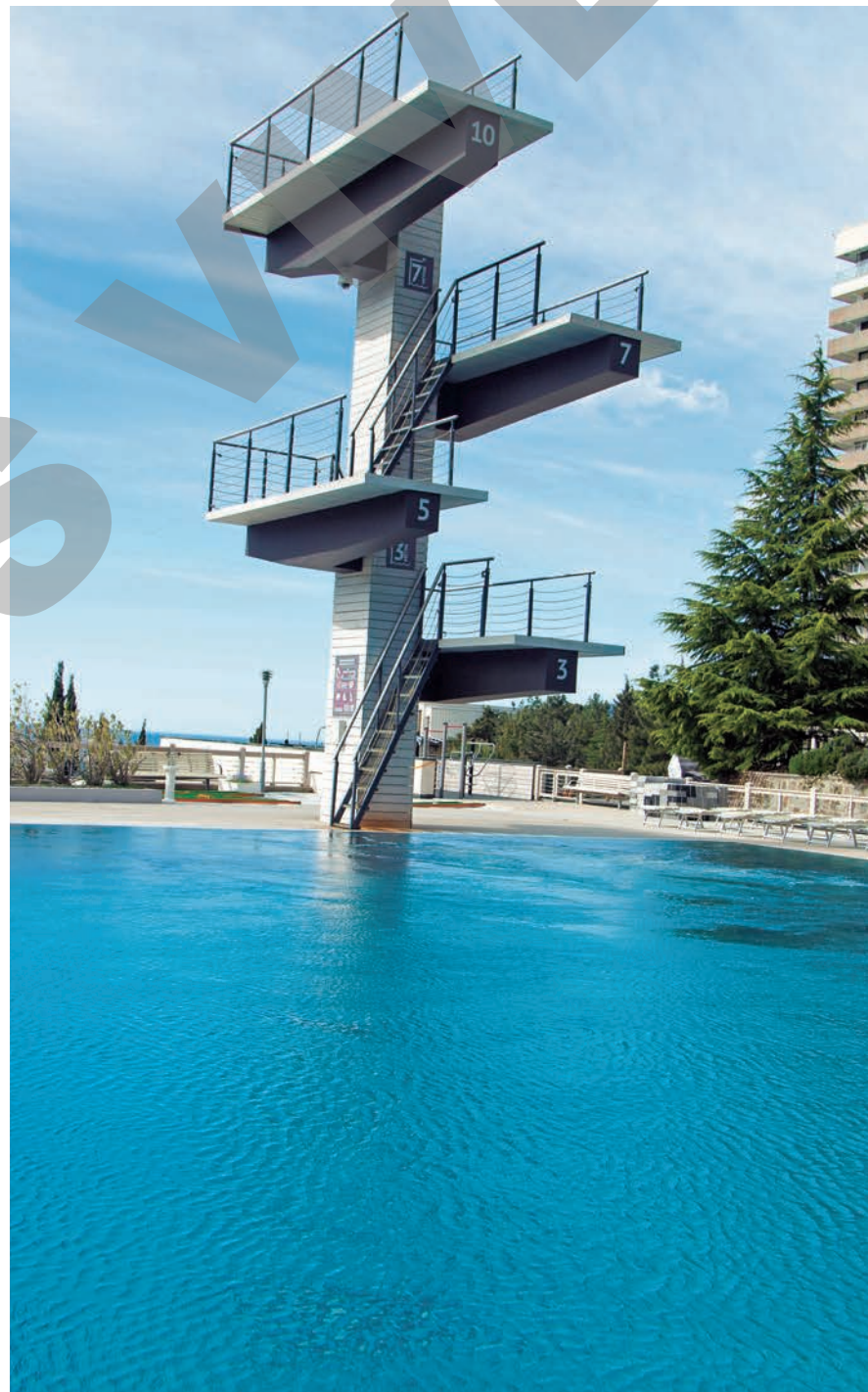
¿Organizamos una competición de juegos de ingenio?

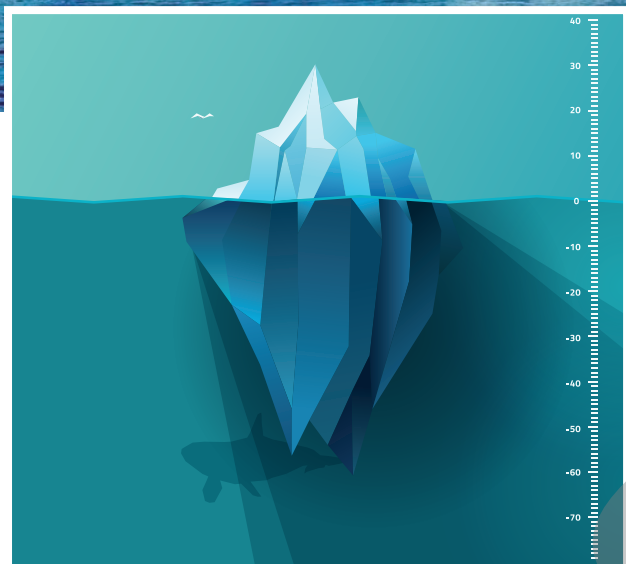
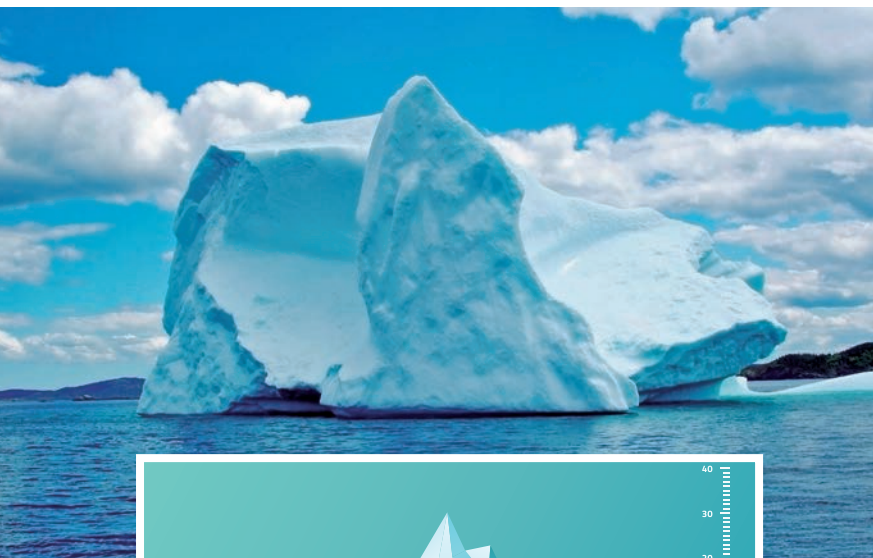
Saber manejar los números naturales y los números enteros es imprescindible para interpretar y transmitir informaciones numéricas (pág. 22).



Aprenderemos a...

- Identificar los números naturales.
- Hallar los divisores y múltiplos de un número.
- Descomponer un número en factores primos.
- Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números.
- Reconocer los números enteros, representarlos en la recta y ordenarlos.
- Efectuar operaciones con números enteros.
- Resolver problemas con números naturales y números enteros.





Observo

- ¿A qué altura se sitúan las plataformas?
- ¿A qué profundidad se halla el extremo sumergido del iceberg?
- ¿Qué temperaturas marcan los termómetros de las imágenes?

Reflexiono

- ¿A qué altura se halla un saltador que, tras zambullirse, se sumerge 5 m?
- Se fijan saltos de trampolín cada 3 min y de plataforma cada 5 min. Si los primeros saltos son simultáneos, ¿cuándo volverán a coincidir?
- ¿Cuál es la altura total del iceberg?
- ¿Cuál es la diferencia entre las temperaturas que señalan los dos termómetros?

Concluyo



- Exponed vuestras respuestas a las preguntas anteriores y argumentadlas.
- Extraed conclusiones acerca de la utilidad de los números naturales y enteros, y de la divisibilidad en situaciones cotidianas.



Compruebo lo que sé...

1. Di si las siguiente divisiones son exactas o enteras, indicando en cada caso el valor del cociente y del resto:

a. $122 : 12$	c. $325 : 15$
b. $261 : 9$	d. $456 : 57$
2. Halla tres divisores de 42.
3. Halla cinco múltiplos de 12.
4. Señala los números enteros no naturales:

A. 7	B. -12	C. -3	D. 0	E. 10
------	--------	-------	------	-------
5. Calcula:

a. $30 + 5 \cdot 2 - 18 : 9 + 9 - 12 : 2 \cdot 3$
b. $2 \cdot [62 + 12 : 4 + 3 \cdot (5 + 15 - 13)]$

1. Números naturales. Divisores y múltiplos

Aprenderemos a...

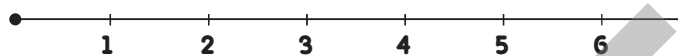
- Identificar los números naturales.
- Hallar los divisores y múltiplos de un número.



¿Cuáles son los números naturales?

Los números naturales son los que se usan para contar, ordenar e identificar.

Todo número natural, salvo el 1, tiene un anterior y un posterior, y se puede representar sobre una semirrecta:



Así, un número es menor que cualquier otro que esté representado a su derecha y mayor que cualquier otro que esté representado a su izquierda:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

El conjunto de los números naturales se simboliza con \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

No lo olvides

- a es divisible por $b \leftrightarrow$
- $\leftrightarrow b$ es divisor de $a \leftrightarrow$
- $\leftrightarrow a$ es múltiplo de b

¿Cómo se hallan los divisores y los múltiplos de un número natural?

Decimos que a es divisible por b si la división $a : b$ es exacta, es decir, tiene resto 0.

Si a es divisible por b , también decimos que b es divisor de a y que a es múltiplo de b .

Observa cómo se relacionan los múltiplos y los divisores:

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 3} \\ 0 \quad 4 \end{array} \rightarrow 12 \text{ es divisible por } 3 \begin{cases} \rightarrow 12 \text{ es múltiplo de } 3 \\ \rightarrow 3 \text{ es divisor de } 12 \end{cases}$$

Ejemplo

Halla los divisores y los múltiplos de 12.

- Para hallar los divisores, dividimos 12 entre los números naturales, 1, 2, 3, ..., hasta que el cociente obtenido sea menor o igual que el divisor. Los divisores de 12 serán los divisores y cocientes de las divisiones exactas.

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 1} \\ 0 \quad 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 2} \\ 0 \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 3} \\ 0 \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 4} \\ 0 \quad 3 \end{array} \rightarrow \text{Como el cociente, 3, es menor que el divisor, 4, ya hemos terminado.}$$

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

- Para hallar los múltiplos, multiplicamos 12 por los sucesivos números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, ... Los múltiplos de 12 serán los productos obtenidos:

$$12 \cdot 1 = 12 \quad 12 \cdot 2 = 24 \quad 12 \cdot 3 = 36 \quad 12 \cdot 4 = 48 \quad 12 \cdot 5 = 60 \quad \dots$$

$$M(12) = \{12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$$

Criterios de divisibilidad

Un número es divisible:

- por 2 \rightarrow si la última cifra es 0 o par.
- por 3 \rightarrow si la suma de las cifras es múltiplo de 3.
- por 4 \rightarrow si las dos últimas cifras son 00 o múltiplo de 4.
- por 5 \rightarrow si la última cifra es 0 o 5.
- por 9 \rightarrow si la suma de las cifras es múltiplo de 9.
- por 10 \rightarrow si la última cifra es 0.

1. ¿Cuáles son los números naturales?

Actividad resuelta 1. El resultado de sumar dos números naturales es siempre otro número natural. ¿Sucede lo mismo al restar dos números naturales?

Veamos qué sucede si tomamos, por ejemplo, los números naturales 5 y 2. Si restamos $5 - 2$ obtenemos un número natural:

$$5 - 2 = 3$$

Pero, si restamos $2 - 5$, el resultado no es ahora un número natural. Por tanto, el resultado de restar dos números naturales no es siempre un número natural.

2. Al multiplicar dos números naturales obtenemos siempre otro número natural. ¿Ocurre lo mismo al dividir?

Actividad resuelta 2. Teniendo en cuenta que las expresiones "a es múltiplo de b" y "b es divisor de a" son equivalentes, obtén por analogía las propiedades de los divisores a partir de las propiedades de los múltiplos.

PROPIEDADES DE LOS MÚLTIPLOS

- 1 Cualquier número natural es múltiplo de 1.
- 2 Cualquier número natural es múltiplo de sí mismo
- 3 Si a y b son múltiplos de c , entonces $a + b$ y $a - b$ son múltiplos de c .
- 4 Si a o b son múltiplos de c , entonces $a \cdot b$ es múltiplo de c .
- 5 Si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c , entonces a es múltiplo de c .

PROPIEDADES DE LOS DIVISORES

- 1 El número 1 es divisor de cualquier número.
- 2 Cualquier número natural es divisor de sí mismo.
- 3 Si c es divisor de a y b , entonces c es divisor de $a + b$ y $a - b$.
- 4 Si c es divisor de a o b , entonces c es divisor de $a \cdot b$.
- 5 Si c es divisor de b y b es divisor de a , entonces c es divisor de a .

3. ¿Cómo se hallan los divisores de un número? ¿Y los múltiplos?

4. Escribe tres divisores de 54, cinco de 40, cuatro de 36 y dos de 17.

5. Halla los múltiplos de 75 que sean mayores que 280 y menores que 380.

6. Comprueba con ejemplos que se cumplen las propiedades de los múltiplos y las propiedades de los divisores.

7. **Resuelvo y comunico** Si las pausas publicitarias en televisión durasen siempre tres minutos, ¿se podrían emitir 122 min de publicidad en un día? ¿Y 2 h de publicidad? Argumenta la respuesta usando múltiplos y divisores.

2. Números primos y números compuestos

Aprenderemos a...

- Identificar si un número es primo o compuesto.
- Descomponer un número en factores primos.



Ten en cuenta

Para saber si un número dado n es primo, se puede demostrar que el último número 2, 3, 5, 7, ... entre el que bastaría dividirlo es el mayor número primo menor que \sqrt{n} .

¿Qué es un número primo?

Un número natural es **primo** si tiene dos divisores: el 1 y el mismo número. Si es divisible por algún otro número, es **compuesto**.

Así, 11 es un número primo, puesto que solo es divisible por 1 y por 11, mientras que 12 es un número compuesto, pues, además de ser divisible por 1 y por 12, lo es por 2, 3, 4 y 6.

Para saber si un número dado es primo, hacemos lo siguiente:

- Dividimos ese número entre los números primos 2, 3, 5, 7, ..., hasta llegar a una división exacta o a una división en que el cociente sea igual o menor que el divisor.
- Si se llega a una división exacta, el número es compuesto; si ninguna división es exacta, el número es primo.

¿Qué es descomponer un número en factores primos?

Descomponer un número en **factores primos** consiste en expresarlo como producto de números primos.

Para descomponer un número en factores primos, dividimos el número sucesivamente entre los números primos 2, 3, 5, 7, ... por los que sea divisible, hasta que encontremos un cociente igual a 1. Los criterios de divisibilidad nos ayudan a saber si el número es divisible o no sin hacer la división.

Ejemplo



Descompón 252 en factores primos.

Se coloca una línea vertical a la derecha del número. A la derecha de la línea, y de arriba abajo, se escriben los divisores primos del número; a la izquierda, los sucesivos cocientes:

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Recuerda que debemos comprobar siempre si el último divisor lo es del nuevo cociente antes de proseguir con el siguiente.

La descomposición de un número en factores primos nos permite conocer el número de divisores que tiene: coincide con el producto de los exponentes de su descomposición incrementados todos en una unidad.

Así, 252 tiene 18 divisores, pues $(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 18$.

Calculadora



DUA

En la calculadora en línea **CalcMe**, para averiguar si un número es primo, puedes utilizar la instrucción **primo?**.

Asimismo, para descomponer en factores primos un número, puedes utilizar la instrucción **factorizar**.

8. Define número primo y número compuesto. Pon ejemplos.

Actividad resuelta 3. Averigua si 29 es un número primo o compuesto.

Calculamos $\sqrt{29}$ para hallar el último número primo con el que debemos probar a dividir. Así, puesto que $\sqrt{29} \approx 5,4$ y el mayor número primo menor que 5,4 es 5, debemos dividir 29 entre 2, 3 y 5:

- No es divisible por 2 porque no acaba ni en 0 ni en cifra par.
- No es divisible por 3 ya que la suma de sus cifras no es múltiplo de 3.
- No es divisible por 5 porque no acaba ni en 0 ni en 5.

Podemos afirmar, pues, que 29 es un número primo.

9. Clasifica los números 420, 91, 101, 803 y 539 en primos y compuestos.

Actividad resuelta 4. A partir de la descomposición en factores primos, halla los divisores de 252.

Partimos de la descomposición en factores primos del **Ejemplo** de la página anterior:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

	3^0	3^1	3^2
2^0	1	3	9
2^1	2	6	18
2^2	4	12	36

Creamos una tabla con los dos primeros divisores primos que figuran en ella, 2 y 3, elevándolos desde 0 hasta la potencia con la que aparecen, y efectuamos todos los productos posibles.

Creamos otra tabla con estos productos en la parte superior y el siguiente divisor primo, 7, en la parte izquierda, elevándolo desde 0 hasta la potencia con la que aparece en la descomposición, y efectuamos todos los productos posibles.

	1	2	3	4	6	9	12	18	36
7^0	1	2	3	4	6	9	12	18	36
7^1	7	14	21	28	42	63	84	126	252

Así hemos obtenido los 18 divisores de 252.

10. Descompón en producto de factores primos los números 4200, 693, 392, 184 y 3150.

11. Escribe tres números en cuya descomposición en factores primos aparezcan 2, 3 y 7.

12. ¿Cuántos divisores tiene el número 472?

13. **Resuelvo y comunico** En un examen en que se preguntó el número de divisores de 28800, la respuesta de un estudiante fue la siguiente:

Como $28800 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 6^2$, el número de divisores de 28800 es $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 54$.

¿Es correcta esta respuesta? ¿Por qué?

3. m.c.d. y m.c.m.

Aprenderemos a...



- Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números y utilizarlos en la resolución de problemas.

No lo olvides

- El m.c.d. de un conjunto de números es divisor de todos ellos. Por tanto, siempre será un número menor.
- El m.c.m. de un conjunto de números es múltiplo de todos ellos. Por tanto, siempre será un número mayor.

Calculadora



Para hallar el m.c.d. y el m.c.m. puedes utilizar las instrucciones **mcd** y **mcm** de la calculadora en línea **CalcMe**.

¿Para qué se utilizan el m.c.d. y el m.c.m.?

El m.c.d. y el m.c.m. se utilizan para resolver numerosas situaciones cotidianas, como, por ejemplo, agrupar elementos sin que sobre ninguno, analizar la coincidencia de fenómenos periódicos...

¿Qué son y cómo se calculan el m.c.d. y el m.c.m.?

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de varios números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de varios números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Para hallarlos, utilizamos la descomposición de los números en factores primos:

- El m.c.d. es el producto de los factores comunes a todas las descomposiciones con el menor de los exponentes con que figuran.
- El m.c.m. es el producto de los factores comunes y los no comunes a todas las descomposiciones con el mayor de los exponentes con que figuran.

Ejemplo

Dados los números 84, 126 y 396, calcula:

- a. El máximo común divisor **DUA** b. El mínimo común múltiplo **DUA**

a. Descomponemos en factores primos los tres números:

84		2	126		2	396		2	
42		2	63		3	198		2	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
21		3	21		3	99		3	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
7		7	7		7	33		3	$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
1			1			11		11	
						1			

Hallamos el m.c.d.:

$$\text{m.c.d.}(84, 126, 396) = \text{m.c.d.}(2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11) = 2 \cdot 3 = 6$$

b. Conocida su descomposición en factores primos, hallamos el m.c.m.:

$$\text{m.c.m.}(84, 126, 396) = \text{m.c.m.}(2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772$$

Números primos entre sí

Dos números son **primos entre sí** si su único divisor común es 1, es decir, si su m.c.d. es 1. Por ejemplo:

$$\text{m.c.d.}(9, 25) = \text{m.c.d.}(3^2, 5^2) = 1 \rightarrow 9 \text{ y } 25 \text{ primos entre sí}$$

Ten en cuenta que dos números primos son siempre primos entre sí, pero dos números pueden ser primos entre sí y no ser primos. Es el caso de 9 y 25, que hemos visto que son primos entre sí, pero no son primos.

14. Define qué es el m.c.d. de varios números y explica cómo se halla.
15. Halla el m.c.d. de estos números:
 a. 180 y 225 b. 196 y 216 c. 49, 120 y 315 d. 240, 325 y 486
16. Averigua si los siguientes pares de números son primos entre sí:
 a. 14 y 15 b. 11 y 17
17. Define qué es el m.c.m. de varios números y explica cómo se halla.
18. Halla el m.c.m. de estos números:
 a. 28 y 98 b. 11, 24 y 40 c. 42, 108 y 150 d. 98, 180 y 441

Actividad resuelta 5. Ana compra 18 rosas rojas y 24 amarillas para hacer ramos.

Quiere hacer ramos con el mayor número posible de rosas de un mismo color y de modo que no le sobre ninguna. ¿Cuántas flores tendrá cada ramo?

Para que no sobre ninguna rosa, el número de flores de cada ramo ha de ser un divisor común de 18 y de 24.

Si queremos que el ramo contenga el mayor número posible de rosas, ese divisor deberá ser el mayor divisor común de 18 y 24, es decir, el m.c.d. (18, 24).

Así, como $m.c.d. (18, 24) = 6$, cada ramo tendrá 6 flores.

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \end{aligned} \rightarrow m.c.d. (18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$



Actividad resuelta 6. La máquina A se revisa cada 36 días, y la B, cada 54. Si hoy se han revisado las dos máquinas, ¿cuántos días han de transcurrir para que vuelva a coincidir la revisión de ambas máquinas?

La máquina A se revisará cada vez que el número de días transcurridos sea un múltiplo de 36, y la B, cada vez que lo sea de 54.

Luego ambas revisiones coincidirán cada vez que ese número sea un múltiplo común de 36 y 54. Y la primera vez será cuando ese múltiplo común sea el menor, es decir, el m.c.m. (36, 54).

Así, como $m.c.m. (36, 54) = 108$, las revisiones coincidirán de nuevo a los 108 días.

$$\begin{aligned} 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\ 54 &= 2 \cdot 3^3 \end{aligned} \rightarrow m.c.m. (36, 54) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

19. **Interpreto, modelizo y resuelvo** Dos tubos de acero miden 252 cm y 270 cm. Se quieren cortar en trozos de igual longitud sin que quede ningún resto. ¿Cuál será la mayor longitud posible de esos trozos?

20. **Interpreto, modelizo y resuelvo** Disponemos de dos cintas de la misma longitud. La primera tiene marcas cada 78 mm, y la segunda, cada 90 mm. Las colocamos superpuestas de forma que coincidan sus primeras marcas (el 0). ¿Cuál es la siguiente marca en la que coincidirán?

4. Números enteros

Aprenderemos a...

- Reconocer los números enteros, representarlos en la recta numérica y ordenarlos.
- Hallar el valor absoluto de un número entero.



Notación

Mientras que los números enteros negativos van precedidos del signo $-$, los números enteros positivos los escribimos prescindiendo del signo $+$. Así, escribimos 2 en lugar de $+2$, 3 en lugar de $+3$, etc.

Ten en cuenta

- Cualquier número entero positivo es mayor que 0 y que cualquier número entero negativo.
- El 0 es mayor que todos los números enteros negativos y menor que todos los números enteros positivos.

Fíjate

- El valor absoluto de un número entero es igual al número natural que se obtiene al prescindir de su signo.
- Excepto en el caso del 0, siempre hay dos números enteros que tienen el mismo valor absoluto.

¿Cuáles son los números enteros?

Muchas situaciones no pueden expresarse utilizando los números naturales: profundidades, temperaturas bajo cero... Es necesario, pues, ampliar el conjunto \mathbb{N} de los números naturales añadiéndole el cero y los números naturales precedidos del signo menos.

Obtenemos así el conjunto de los **números enteros**, simbolizado con \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Así, \mathbb{Z} está formado por:

- Los enteros positivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., que son los números naturales.
- El cero: 0, que no es positivo ni negativo.
- Los enteros negativos: $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \dots$, que son los números naturales precedidos del signo $-$.

Representación y ordenación

Los números enteros se pueden **representar** sobre la recta numérica:

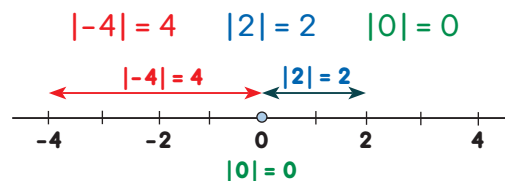
- Marcamos un punto en la recta que represente el 0.
- Tomamos un segmento como unidad y lo transportamos a derecha e izquierda del 0.
- Situamos los números positivos a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0.



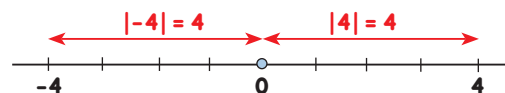
La situación de los números enteros sobre la recta numérica permite **ordenarlos**: dados dos números enteros cualesquiera, es mayor el que está situado más a la derecha en la recta.

¿Qué es el valor absoluto de un número entero?

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia desde el punto que representa este número en la recta numérica hasta el 0. Se indica escribiendo el número entre barras:



Observa que -4 y 4 tienen el mismo valor absoluto, 4:



Cuando dos números tienen el mismo valor absoluto pero signos diferentes, se dice que son **opuestos**. Así, por ejemplo, 4 y -4 son números opuestos.

21. ¿Cómo se obtiene el conjunto de los números enteros?

22. Expresa utilizando números enteros:

a. El ascensor está en la planta baja.

c. El termómetro marca 7°C bajo cero.

b. Tiene una deuda de 56 €.

d. La cueva está a 64 m bajo el nivel del mar.

23. Escribe, en cada caso, una frase con la expresión correspondiente:

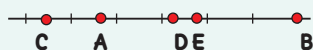
a. -4°C

b. 85 m

c. -17 €

d. planta -3

Actividad resuelta 7. En la siguiente recta numérica se han representado los números 33, -11 , 100, 44 y -41 . Relaciona cada uno con la letra que le corresponde.



Dados dos números enteros cualesquiera, es mayor el que se representa más a la derecha en la recta. Por tanto, tenemos:

$$-41 < -11 < 33 < 44 < 100 \rightarrow C = -41, A = -11, D = 33, E = 44, B = 100$$

24. Escoge 5 números enteros, represéntalos en la recta y ordénalos.

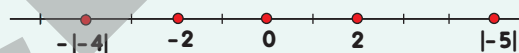
25. ¿Qué es el valor absoluto de un número entero? Pon ejemplos.

Actividad resuelta 8. Representa en la recta numérica y ordena de menor a mayor los números -2 , $|-5|$, 2 , $-|-4|$ y 0 .

Primero calculamos los dos valores absolutos:

$$|-5| = 5 \qquad -|-4| = -4$$

Ahora representamos en la recta numérica los números dados, teniendo en cuenta que $|-5| = 5$ y $-|-4| = -4$:



Finalmente, los escribimos ordenados:

$$-|-4| < -2 < 0 < 2 < |-5|$$

26. Halla el valor absoluto de los números 6, -9 , -15 , 0 y 17 .

27. Escribe todos los números enteros cuyo valor absoluto sea menor que 3.

28. ¿Cuándo dos números son opuestos?

29. **Formulo y compruebo** Se sabe que $|x| = 5$ y $|y| = 3$. Si x e y son números negativos, ¿cuál de los dos es mayor?

5. Operaciones con números enteros (I)

Aprenderemos a...

- Efectuar operaciones de suma y resta con números enteros.



¿Cómo se suman o restan dos números enteros?

Para **sumar** dos números enteros, procederemos de manera diferente según tengan el mismo o diferente signo:

- Si tienen el **mismo signo**, hallamos los valores absolutos de ambos números, los sumamos y ponemos al resultado el signo de dichos números:

$$3 + 2 \rightarrow |3| + |2| = 3 + 2 = 5 \rightarrow 3 + 2 = 5$$

$$-1 + (-2) \rightarrow |-1| + |-2| = 1 + 2 = 3 \rightarrow -1 + (-2) = -3$$

- Si tienen **diferente signo**, hallamos los valores absolutos de ambos números, restamos del mayor el menor y ponemos al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto:

$$-2 + 8 \rightarrow |8| - |-2| = 8 - 2 = 6 \rightarrow -2 + 8 = 6$$

$$12 + (-22) \rightarrow |-22| - |12| = 22 - 12 = 10 \rightarrow 12 + (-22) = -10$$

Para **restar** dos números enteros, sumamos al primero el opuesto del segundo:

$$3 - 2 = 3 + (-2) = 1 \quad -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

↑
↑
 opuesto opuesto

¿Cómo se efectúan operaciones combinadas con sumas y restas?

Veamos cómo se efectúan operaciones combinadas con sumas y restas mediante un ejemplo.

Ejemplo

Efectúa la siguiente operación:

$$-3 + 4 - (-5) + (-18)$$

En primer lugar, simplificamos la escritura:

$$-3 + 4 - (-5) + (-18) = -3 + 4 + 5 - 18$$

A continuación, podemos proceder efectuando las sumas y las restas en el orden en que aparecen:

$$(-3 + 4) + 5 - 18 = 1 + 5 - 18 = 6 - 18 = -12$$

Alternativamente, podemos proceder sumando por un lado los números positivos y por otro los números negativos:

$$-3 + 4 + 5 - 18 = -21 + 9 = -12$$

Propiedades de la suma

- Propiedad conmutativa:
 $2 + 3 = 3 + 2$
- Propiedad asociativa:
 $2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5$
- Elemento neutro (el 0):
 $5 + 0 = 0 + 5$
- Elemento opuesto:
 $3 + (-3) = -3 + 3 = 0$

No lo olvides

Antes de empezar a operar simplificaremos la escritura de signos y paréntesis aplicando la siguiente regla:

$$\begin{array}{l}
 + (- \rightarrow - \quad - (+ \rightarrow - \\
 + (+ \rightarrow + \quad - (- \rightarrow +
 \end{array}$$

Calculadora



Las calculadoras de bolsillo disponen de la tecla **(-)**, que permite introducir números negativos.

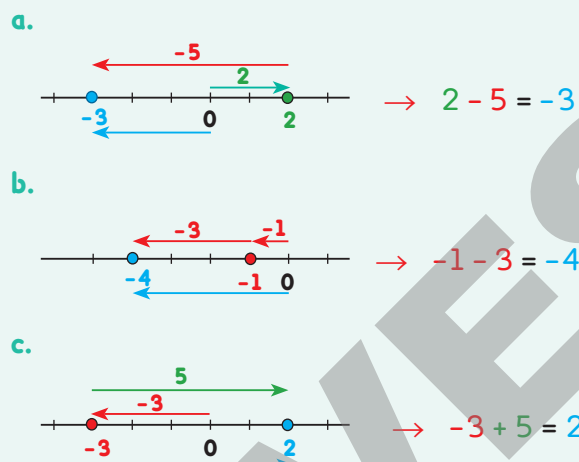


Actividad resuelta 9. Calcula con la ayuda de un gráfico:

- a. $2 - 5$ b. $-1 - 3$ c. $-3 + 5$

En este caso, las expresiones ya están simplificadas.

Nos situamos en el punto de la recta que corresponde al primer número de la operación y avanzamos tantas posiciones como indica el segundo, bien **hacia la derecha** si se trata de una **suma**, bien **hacia la izquierda** si se trata de una **resta**.



30. Efectúa estas operaciones. Comprueba el resultado con la ayuda de un gráfico:

- a. $-7 + 2$ e. $6 - 2$
 b. $1 - 6$ f. $-3 + 8$
 c. $4 + 3$
 d. $-1 - 5$

Actividad resuelta 10. Razona por qué la igualdad $3 - 5 = 5 - 3$ no es cierta y corrígela.

No es cierta porque $3 - 5 = -2$ y $5 - 3 = 2$, ya que la resta no tiene la propiedad conmutativa.

Sin embargo, si escribimos la resta en forma de suma del primer término con el opuesto del segundo término, sí podemos aplicar dicha propiedad:

$$3 - 5 = 3 + (-5) = (-5) + 3 = -5 + 3$$

Por tanto, la igualdad correcta es:

$$3 - 5 = -5 + 3 = -2$$

31. Explico el proceso Razona por qué la igualdad $(7 - 5) + 3 = 7 - (5 + 3)$ no es cierta y corrígela.

32. Efectúa las siguientes operaciones utilizando los dos métodos que hemos visto en el **Ejemplo**:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| a. $24 + 12 - 23 + 6$ | d. $4 - 18 + 5 - 32$ | g. $19 - 23 - 6 + 10$ |
| b. $-12 + 42 - 8 - 15$ | e. $-21 - 6 + 19 + 3$ | h. $70 - 41 + 5 - 88$ |
| c. $-7 - 15 - 3 + 22$ | f. $30 + 7 - 55 + 14$ | i. $-17 + 2 - 44 + 15$ |

33. Efectúa las siguientes operaciones simplificando previamente la escritura:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a. $17 + 8 + (-23) - 6$ | d. $27 - 41 - (-15) - 18$ | g. $-9 - (-13) - 7$ |
| b. $-12 + 16 + (-8)$ | e. $15 + 12 + (-25) + 4$ | h. $23 - (-18) + 7 + (-14)$ |
| c. $-7 + (-5) + (-3)$ | f. $12 + (-30) - (-19) + 3$ | i. $-26 + (-4) + 15$ |

6. Operaciones con números enteros (II)

Aprenderemos a...

- Multiplicar y dividir números enteros.
- Resolver operaciones combinadas con números enteros.



Regla de los signos

$+$	\cdot	\rightarrow	$-$	$-$	\cdot	\rightarrow	$-$
$+$	\cdot	\rightarrow	$+$	$-$	\cdot	\rightarrow	$+$
$+$	$:$	\rightarrow	$-$	$-$	$:$	\rightarrow	$-$
$+$	$:$	\rightarrow	$+$	$-$	$:$	\rightarrow	$+$

Ten en cuenta

La propiedad distributiva se cumple también para la resta:

$$-4 \cdot (7 - 9) = -4 \cdot 7 - (-4) \cdot 9$$

Propiedades de la multiplicación

- Propiedad conmutativa:
 $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
- Propiedad asociativa:
 $2 \cdot (3 \cdot 5) = (2 \cdot 3) \cdot 5$
- Elemento neutro (el 1):
 $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5$

¿Cómo se multiplican o dividen dos números enteros?

- Para **multiplicar** dos números enteros, multiplicamos sus valores absolutos y después añadimos el signo aplicando la regla de los signos:

$$-4 \cdot (-3) = 12$$

$$-28 \cdot 4 = -112$$

- Para **dividir** dos números enteros, dividimos sus valores absolutos y después añadimos el signo aplicando la regla de los signos:

$$12 : (-3) = -4$$

$$-18 : (-6) = 3$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por los sumandos:

$$-4 \cdot (7 + 9) = -4 \cdot 7 + (-4) \cdot 9 = -28 + (-36) = -28 - 36 = -64$$

Extracción de factor común

Una suma en la que los sumandos son productos que tienen un factor común, podemos transformarla en una multiplicación:

$$-3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) = (-3 + 5) \cdot (-4)$$

Esta transformación se llama **extracción de factor común**.

¿Cómo se efectúan las operaciones combinadas?

Las operaciones combinadas con números enteros se efectúan siguiendo el orden habitual, simplificando la escritura cuando sea necesario:

- 1 Operaciones entre paréntesis.
- 2 Multiplicaciones y divisiones, en el orden en que aparecen.
- 3 Sumas y restas.

Ejemplo

Efectúa:

a. $-3 - 2 \cdot (-7) + 4 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2)$

b. $4 - 8 + 5 \cdot [7 - (4 - 6)]$

$$\begin{aligned} \text{a. } & -3 - 2 \cdot (-7) + 4 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2) = -3 - (-14) + (-20) - (-6) = \\ & = -3 + 14 - 20 + 6 = -23 + 20 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } & 4 - 8 + 5 \cdot [7 - (4 - 6)] = 4 - 8 + 5 \cdot [7 - (-2)] = 4 - 8 + 5 \cdot (7 + 2) = \\ & = 4 - 8 + 5 \cdot 9 = 4 - 8 + 45 = 49 - 8 = 41 \end{aligned}$$

Ten en cuenta que, si aparece un paréntesis precedido del signo menos y que incluye solo sumas y restas, puedes eliminarlo cambiando los signos de los números de su interior. Así:

$$7 - (4 - 6) = 7 - 4 + 6 = 9$$

Actividad resuelta 11. Razona por qué la división $16 : 0$ es imposible.

Si el resultado de la división fuese un número x , se cumpliría que:

$$0 \cdot x = 16$$

Pero no existe ningún número que multiplicado por 0 dé 16.

Actividad resuelta 12. Extrae factor común en la expresión $-4 \cdot 7 - 14 + 7$.

De entrada, no vemos un factor que se repita en todos los sumandos. Sin embargo, $14 = 2 \cdot 7$ y $7 = 1 \cdot 7$ por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} -4 \cdot 7 - 14 + 7 &= -4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = \\ &= (-4 - 2 + 1) \cdot 7 \end{aligned}$$

34. Calcula:

a. $7 \cdot (-4)$

b. $-3 \cdot (-7)$

c. $2 \cdot (-10) \cdot 3$

d. $-6 \cdot (-5) \cdot (-9)$

35. Di en cuáles de las siguientes operaciones el resultado es un número entero y, en ese caso, indícalo:

a. $-15 : (-3)$

b. $0 : 5$

c. $18 : (-9)$

d. $-3 : 0$

36. Aplica la propiedad distributiva:

a. $7 \cdot (11 + 15)$

b. $-3 \cdot (9 - 7 + 12)$

c. $-5 \cdot (3 - 4 - 5)$

37. Extrae factor común:

a. $-5 \cdot (-3) + (-5) \cdot 4$

b. $14 \cdot (-3) - (-3) \cdot (-6)$

c. $4 \cdot 7 + 2 \cdot 6$


Actividad resuelta 13. Calcula:

$$3 \cdot (-2) + 5 \cdot [-7 + 8 \cdot (-4)] - 9 \cdot (-4)$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) + 5 \cdot [-7 + 8 \cdot (-4)] - 9 \cdot (-4) &= \\ &= 3 \cdot (-2) + 5 \cdot [-7 + (-32)] - 9 \cdot (-4) = \\ &= 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-7 - 32) - 9 \cdot (-4) = \\ &= 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-39) - 9 \cdot (-4) = \\ &= 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-39) - 9 \cdot (-4) = \\ &= -6 + (-195) - (-36) = \\ &= -6 - 195 + 36 = \\ &= -201 + 36 = \\ &= -165 \end{aligned}$$

Actividad resuelta 14. Calcula:

$$\begin{aligned} \{-4 + 4 \cdot [5 \cdot (-6 - 3 \cdot 2)]\} : [-5 - (-1)] &= \\ \{-4 + 4 \cdot [5 \cdot (-6 - 3 \cdot 2)]\} : [-5 - (-1)] &= \\ = \{-4 + 4 \cdot [5 \cdot (-6 - 6)]\} : (-5 + 1) &= \\ = \{-4 + 4 \cdot [5 \cdot (-12)]\} : (-4) &= \\ = [-4 + 4 \cdot (-60)] : (-4) &= \\ = [-4 + (-240)] : (-4) &= \\ = (-4 - 240) : (-4) &= \\ = -244 : (-4) &= \\ = 61 & \end{aligned}$$

38.  **Utilizo la calculadora** Efectúa estas operaciones y comprueba el resultado con la calculadora:

a. $8 : 4 + 3 \cdot 6 : (-2) + (-5) \cdot 5$

d. $(-7 + 12) \cdot 2 - 4 \cdot [15 : 3 - 9 + 2 \cdot (3 - 1)]$

b. $-2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 24 : 6 \cdot (-3)$

e. $3 \cdot 6 + 12 : 2 - 3 \cdot (-6) + 4 \cdot [3 + 2 \cdot (4 - 7)]$

c. $7 + 3 \cdot 5 - 24 : 6 - (-2) \cdot (-5) + 5$

f. $20 : 5 - [9 \cdot (5 - 2) + 2] - 8 : 4 + 4$

7. Resolución de problemas

Recuerda

Los pasos para resolver problemas son:

1. Comprender el problema.
2. Elaborar una estrategia de resolución.
3. Ejecutar el plan.
4. Comprobar el resultado.

Tanto la divisibilidad como las operaciones con números enteros se aplican para resolver numerosos problemas cotidianos.

En los problemas de divisibilidad te puede resultar de ayuda la siguiente regla:

- Si del enunciado se infiere que el resultado debe ser menor que los datos, debes calcular el m.c.d.
- Si del enunciado se infiere que el resultado debe ser mayor que los datos, debes calcular el m.c.m.

Ejemplo 1



Tres líneas de autobús parten de una estación. La primera línea sale cada 15 min; los de otra, cada 20 min, y los de la otra, cada 24 min. Si tres autobuses, uno de cada línea, han coincidido en salir a las 12:00, ¿a qué hora volverán a coincidir por primera vez?

1. Comprender el problema:

Los autobuses de las tres líneas parten cada 15, 20 y 24 minutos.



Los tres han coincidido a las 12:00 y queremos saber cuándo volverán a coincidir.

2. Elaborar una estrategia de resolución:

Coincidirán cada vez que los minutos transcurridos sean un múltiplo común de 15, 20 y 24. Y lo harán por primera vez cuando ese múltiplo sea el menor: m.c.m. (15, 20, 24).

3. Ejecutar el plan: Hallamos m.c.m. (15, 20, 24):

$$15 = 3 \cdot 5 ; 20 = 2^2 \cdot 5 ; 24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{m.c.m. (15, 20, 24)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Coincidirán pasados 120 min, a las 14:00.

4. Comprobar el resultado obtenido: Anotamos las horas de salida posteriores a las 12:00 de los autobuses de cada línea y vemos que vuelven a coincidir a las 14:00.

Ejemplo 2



En un examen tipo test de 20 preguntas, cada respuesta correcta suma 7 puntos, cada respuesta incorrecta resta 4 y cada respuesta en blanco resta 2. Expresa con una operación combinada la puntuación obtenida al contestar 12 preguntas bien, 4 mal y dejar el resto en blanco, y calcúlala.

1. Comprender el problema: Se trata de calcular la puntuación obtenida en un examen aplicando los criterios dados.

2. Elaborar una estrategia de resolución:

Calculamos primero cuántas preguntas se han dejado en blanco y después multiplicamos el número de respuestas correctas por 7, el de incorrectas por -4 y el de respuestas en blanco por -2 , y sumamos los resultados.

3. Ejecutar el plan: Calculamos las respuestas en blanco:

$$20 - (12 + 4) = 20 - 16 = 4$$

Por tanto, la puntuación obtenida es:

$$12 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) = 84 + (-16) + (-8) = 84 - 16 - 8 = 6$$

4. Comprobar el resultado obtenido:

Repasamos los cálculos y vemos que el resultado es correcto.

39. Queremos hacer lotes iguales con tres artículos, A, B y C. Tenemos 276 unidades de A, 300 de B y 312 de C. ¿Cuál es el mayor número de lotes que podemos hacer sin que sobre nada? ¿Cuál es su composición?

40. Luis tiene 50 €. Compra tres entradas para el cine de 8 € cada una y un libro de 19 €. Sus amigos le pagan sus entradas y gasta 3 € en un refresco. Expresa el dinero que le queda con una operación combinada.

Síntesis

Números naturales. Divisores y múltiplos

- Los **números naturales** son los que se usan para contar, ordenar e identificar. El conjunto de los números naturales se simboliza con \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, 25, 26, \dots\}$$

- Se dice que **a es divisible por b** si, al dividir a entre b , el resto es 0.
- Si **a es divisible por b , b es divisor a y a es múltiplo de b .**

Números primos y números compuestos

- Un número natural es **primo** si tiene dos divisores: el 1 y el mismo número. Si es divisible por algún otro número, es **compuesto**.
- **Descomponer** un número en **factores primos** es expresarlo como producto de números primos.
- El número de divisores de un número coincide con el producto de los exponentes de su descomposición incrementados todos en una unidad.

m.c.d. y m.c.m.

- El **m.c.d.** de varios números es el mayor divisor común. Se halla multiplicando los factores comunes de sus descomposiciones en factores primos con el menor exponente con el que figuran.
- El **m.c.m.** de varios números es el menor múltiplo común. Se halla multiplicando los factores comunes y no comunes de sus descomposiciones en factores primos con el mayor exponente con el que figuran.

Números enteros

- El conjunto de los números enteros, \mathbb{Z} , lo forman los números naturales, el 0 y los números naturales precedidos del signo $-$.
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$
- Se pueden **representar sobre la recta numérica** y **ordenar** según la posición que ocupan: cuanto más a la derecha se sitúe su representación, mayor es el número.
- El **valor absoluto** de un número entero es la distancia desde el punto de la recta que lo representa hasta el 0. Es igual al número natural obtenido al prescindir del signo. Por ejemplo:
$$|-4| = 4 \quad |2| = 2 \quad |0| = 0$$
- Dos números enteros son **opuestos** si tienen el mismo valor absoluto pero signos diferentes. Así, por ejemplo, -2 y 2 son números opuestos.

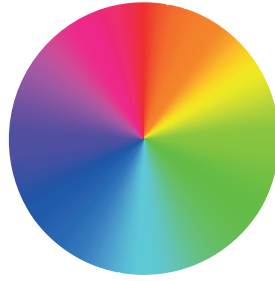
Operaciones con números enteros

- Para **sumar** dos números enteros:
 - Con el **mismo signo**, hallamos los valores absolutos de ambos números, los sumamos y ponemos al resultado el signo de dichos números.
 - Con **diferente signo**, hallamos los valores absolutos de ambos números, restamos del mayor el menor y ponemos al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto.
- Para **restar** dos números enteros, sumamos al primero el opuesto del segundo.
- Para **multiplicar (dividir)** dos números enteros, multiplicamos (**dividimos**) sus valores absolutos y añadimos el signo aplicando esta regla:
$$\begin{array}{cccc} + \cdot - & \rightarrow & - & - \cdot + & \rightarrow & - & + \cdot + & \rightarrow & + & - \cdot - & \rightarrow & + \\ + : - & \rightarrow & - & - : + & \rightarrow & - & + : + & \rightarrow & + & - : - & \rightarrow & + \end{array}$$
- **Operaciones combinadas:** se sigue este orden, simplificando la escritura si es necesario:
 - 1 Operaciones entre paréntesis.
 - 2 Multiplicaciones y divisiones, en el orden en que aparecen.
 - 3 Sumas y restas.

Codificación de colores



El color de un píxel iluminado en una pantalla se forma mezclando luces de los tres colores primarios **RGB**: rojo (*Red*), verde (*Green*) y azul (*Blue*).



Para definir los colores visualizables se emplea un sistema de codificación que permite especificar la intensidad de cada color RGB. Así, por ejemplo, el sistema **hexadecimal** permite codificar más de 16 millones de colores.

41. Un código de color hexadecimal consta de seis caracteres (números del 0 al 9 o letras de la A a la F), usualmente precedidos por el símbolo #. Los dos primeros indican la intensidad de rojo que hay en el color; los dos siguientes, la de verde, y los dos últimos, la de azul.

En el código de color #567826, ¿qué parte indica la intensidad de cada color RGB?

42. Cada uno de los colores RGB que componen un color puede tener una intensidad comprendida entre 0 y 255. Para obtenerla, se multiplica el primero de los dos dígitos que lo simbolizan por 16 y se suma el segundo dígito.

Sabiendo que las relaciones entre letras y números son A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 y F = 15, responde a estas preguntas:

- ¿Cuál es la intensidad del color rojo que contiene un color cuyo código es #23A12C?
- ¿Cuál es la intensidad del color verde que contiene un color cuyo código es #11AB3D?
- ¿Cuál es la intensidad del color verde que contiene un color cuyo código es #B3A13F?
- ¿Cuáles son las intensidades de los tres colores primarios en el código #A7F51E?

43. El color blanco se corresponde con el código #FFFFFF. ¿Cuál es la intensidad de cada uno de los colores RGB que lo forman?

Me comprometo con los ODS



ODS 3: Salud y bienestar

Garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades es uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible fijados por la ONU para 2030.

Frutas y hortalizas son alimentos esenciales para la nutrición humana. Por eso es importante consumir como mínimo 5 raciones cada día.



Estimando que, aproximadamente, una ración de fruta u hortalizas equivale a 150 g (en crudo) y que tiene un valor calórico de 50 kcal, responde:

- Una persona que cumpla estrictamente las recomendaciones de la Asociación para la Promoción del Consumo de Frutas y Hortalizas "5 al día", ¿cuántos gramos de fruta o verdura tomará en un día? ¿Y en una semana?
- Un niño consume en un día 350 kcal en fruta y hortalizas, ¿cuántas raciones habrá consumido aproximadamente?

46. Si los objetivos se traducen en un consumo de, al menos, 3 raciones de frutas y 2 de hortalizas al día, ¿cuántos días deben transcurrir como máximo para que una persona haya comido en total 27 raciones de fruta? En ese momento, ¿cuántas hortalizas habrá comido?

47. Una persona come en un día 110 g de manzana para desayunar, 80 g de melocotón a media mañana, una ensalada de 150 g de lechuga y 90 g de uva para comer, y 180 g de verdura a la hora de cenar. ¿Cumple con las recomendaciones?

Para reflexionar...



48. ¿Cumple tu dieta diaria el objetivo de al menos 3 raciones de frutas y 2 de hortalizas? Si no es así, ¿por qué motivo?

Ejercito mis saberes

PRACTICO

Números naturales. Divisores y múltiplos

49. ¿Cuántos múltiplos de 5 hay mayores que 25 y menores que 75?
50. Copia y completa esta tabla en tu cuaderno según sean los números divisibles (D) o no divisibles (ND):

	2	3	4	5	9	11
56	D	ND	—	—	—	—
261	—	—	—	—	—	—
660	—	—	—	—	—	—
1455	—	—	—	—	—	—

51. Averigua, en cada caso, el menor número de tres cifras que cumple con lo que se indica:
- Es divisible por 7.
 - Es divisible por 3 y 5.
 - Es divisible por 2, 3 y 5.
52. Los números 12 y 15 son múltiplos de 3. ¿Es $12 \cdot 15$ múltiplo de 3? ¿Y de 9? Razona las respuestas.
53. Si un número a es divisible por 4 y por 6, ¿es divisible por 24? Razona la respuesta.
54. Calcula los posibles valores de X e Y para que los siguientes números sean divisibles por 3 y por 11:
- $35X9Y43$
 - $3X7234Y$

Números primos y números compuestos

55. Halla los números primos que son mayores que 200 y menores que 240.
56. ¿Cuál de estas expresiones es la descomposición de 48 en factores primos? Razona la respuesta.
- $8 \cdot 6$
 - $2^4 \cdot 3$
 - $2^3 \cdot 6$
 - $4 \cdot 12$
57. Descompón en factores primos:
- 440
 - 234
 - 521
 - 986
 - 651
 - 1704
 - 881
 - 351

58. ¿Cuántos divisores tienen estos números?
- 336
 - 432
 - 1620
 - 10800
59. Calcula todos los divisores de:
- 280
 - 540
 - 264
 - 3675

m.c.d. y m.c.m.

60. Averigua cuáles son el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:
- 180 y 225
 - 196 y 216
 - 240, 325 y 486
 - 132, 144 y 156
61. Calcula:
- m.c.d. (1092, 2295, 1980)
 - m.c.m. (711, 693, 423)
62. Sabiendo que $m.c.d.(a, b) \cdot m.c.m.(a, b) = a \cdot b$, para cualesquiera que sean a y b :
- Calcula m.c.m. (1870, 740), sabiendo que $m.c.d.(1870, 740) = 10$.
 - Calcula m.c.d. (326, 542), sabiendo que $m.c.m.(326, 542) = 88346$.
63. Halla dos números a y b tales que $m.c.m.(a, b) = 360$ y $m.c.d.(a, b) = 12$.
64. Razona si es posible hallar dos números a y b tales que $m.c.m.(a, b) = 240$ y $m.c.d.(a, b) = 14$.
65. Halla los valores de x que verifican $m.c.d.(18, x) = 1$ y $1 \leq x \leq 18$.
66. Sabiendo que los números a , b y c son primos, halla m.c.m. (a, b, c) y m.c.d. (a, b, c).
67. Halla el menor valor de x que verifica que $m.c.m.(x, 36) = 180$.
68. Calcula el menor número natural que es divisible por 7, por 11 y por 13.
69. Calcula el menor número natural tal que:
- Si lo dividimos entre 3, entre 5 y entre 7, obtenemos de resto 1.
 - Si lo dividimos entre 132, entre 248 y entre 364, obtenemos de resto 3.

Ejercito mis saberes

Números enteros

70. Representa en la recta numérica los números siguientes y ordénalos de menor a mayor:

0 1 2 4 7 -2 -5 -8

71. Halla el valor absoluto de:

16 -98 45 -34 0 5

72. Escribe los números tales que su valor absoluto es 13.

73. Ordena de menor a mayor:

a. $-3, -|-5|, |-2|, 3, |-4|$

b. $-1, 0, |-1|, |-5|, -|-5|, -|-3|$

74. Halla un número a tal que $|a| \cdot 3$ y $a, -|-5|$.

75. Se sabe que $|x| = 4$ y $|y| = 9$. Si x e y son números negativos, ¿cuál es mayor? ¿Y si ambos son positivos?

76. Busca valores para a y b que prueben la falsedad de estas expresiones:

a. $||a| - |b||, |a - b|$ b. $|a - b| = |a| - |b|$

Operaciones con números enteros

77. Efectúa:

a. $25 - 95 - 18 - 32$ d. $-39 - 11 + 41 - 19$

b. $-33 + 49 - 31 + 15$ e. $-7 + 40 - 11 - 4$

c. $-4 - 12 + 19 - 77$ f. $53 - 22 - 10 - 17$

78. Simplifica la escritura y efectúa:

a. $3 - (-5) - 7$ d. $-23 - (-32) + (-21)$

b. $-2 - (-3) + 8$ e. $-(-12) + (-21) - (-5)$

c. $-(-7) + (-12) - 9$ f. $-90 + (-32) - (-32)$

79. ¿Cuál es el signo de b si $a - b > a$? Razónalo.

80. Calcula:

a. $7 \cdot 13$ c. $8 \cdot (-8)$ e. $-2 \cdot 14$

b. $-3 \cdot 16$ d. $-4 \cdot (-9)$ f. $-5 \cdot (-6)$

81. Indica qué debe ocurrir para que el producto de varios números negativos sea:

a. Un número negativo b. Un número positivo

82. Copia la tabla siguiente en tu cuaderno y complétala:

Dividendo	63	70	■	39	■
Divisor	-9	■	-4	13	-9
Cociente	■	-5	7	■	-1

83. Los números 36 y 24 son múltiplos de 6. Utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma para comprobar que $36 + 24$ y $36 - 24$ son también múltiplos de 6.

84. En una división, se multiplican dividendo y divisor por el mismo número. ¿Cómo cambia el cociente?

85. Si se disminuye en una unidad cada uno de los dos factores de una multiplicación, ¿cómo varía el producto?

86. Extrae factor común:

a. $-4 \cdot 9 + (-4) \cdot (-7)$

b. $-4 \cdot (-8) + (-4) \cdot (-4)$

c. $15 \cdot (-5) - (-4) \cdot (-5)$

d. $8 \cdot 9 + (-3) \cdot 8 + (-3) \cdot 8$

87. Calcula:


a. $-3 + 5 \cdot (-7) - 3 \cdot (-9)$

b. $-3 \cdot (-6) + (-12) : (-3 - 7 + 4)$

c. $9 - 12 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) \cdot (-5 - 7)$

d. $2 \cdot (-3 + 9) - (-2) \cdot (-7 - 15) - 5$

88. Calcula:

 a. $3 \cdot (-4) - (-5) \cdot [-2 - (-9)]$

b. $(-7 - 3) \cdot [-5 + 12 \cdot (-3) + 4]$

c. $-3 \cdot (5 - 9) - 2 \cdot [7 - (-9) - 11]$

d. $(-3 - 5) \cdot (2 - 7) - 4 \cdot [3 - 5 \cdot (-2) - 3]$

89. Calcula:

a. $3 - 7 \cdot [12 - (-30) : (-6) + 2 \cdot (-3)]$

b. $-3 - 5 \cdot (4 - 9 \cdot 3) + 2 \cdot [5 - 7 \cdot (-3) + (-12)]$

c. $[-12 : 4 + 3 \cdot (-5)] \cdot [18 - 6 - (-2) + 4 \cdot (-3)]$

d. $-3 \cdot [-2 + 3 \cdot (-5) - (-4) \cdot (-2)] + 3 \cdot (-2)$

RESUELVO PROBLEMAS

90. Queremos alicatar una pared de 425 cm de largo por 250 cm de alto con azulejos cuadrados del mayor tamaño posible, sin tener que cortar ninguno.
- ¿Qué tamaño tendrán los azulejos?
 - ¿Cuántos necesitaremos?
91. Una carta de una baraja mide 96 mm por 64 mm. Deseamos hacer un mosaico cuadrado con cartas de la baraja, colocadas todas en la misma posición.
- ¿Cuántas cartas necesitamos, como mínimo, para hacer el mosaico?
 - ¿Qué medidas tendrá el mosaico?
92. Tres barcos realizan travesías de 12, 15 y 18 días. Si cada vez que regresan a puerto vuelven a zarpar al día siguiente, ¿cuántos días transcurrirán entre dos salidas simultáneas?



93. Un cometa es visible desde la Tierra cada 36 años, y otro, cada 63 años. Si los dos fueron vistos en 2005, ¿en qué año volverán a ser visibles simultáneamente desde la Tierra? Escoge la respuesta correcta y justifica tu elección:
- 2005 + m.c.d. (36 y 63)
 - 2005 + m.c.m. (36 y 63)
 - m.c.d. (2005 + 36 y 2005 + 63)
 - m.c.m. (2005 + 36 y 2005 + 63)
94. Un carpintero tiene tres listones, de 144 cm, 80 cm y 192 cm. Desea dividirlos en trozos de igual longitud y que esta sea la mayor posible. ¿De qué longitud será cada trozo? ¿Cuántos trozos podrá hacer?

95. ¿Cuál es el mayor número de lotes que se pueden hacer con 345 chokolatinas, 375 bolsas de caramelos y 390 sobres de frutos secos de forma que cada lote tenga la misma composición y no sobre nada?
96. Una panadería tiene pan recién hecho cada 24 min; napolitanas, cada 18 min, y magdalenas, cada 30 min. Si a las 10:30 tenían recién hechos los tres tipos de producto, ¿a qué hora volveremos a encontrar los tres productos recién horneados?

Actividades PISA

97. El proyecto de Tecnología

La profesora de Tecnología pide a los alumnos de una clase que formen grupos y que cada uno construya una pajarera cuyos componentes son:



- 16 tornillos
- 5 escuadras de sujeción
- 5 trozos cuadrados de madera: 1 para el suelo, 2 para el tejado y 2 para los laterales
- 2 trozos de madera ya cortados a medida para las caras frontal y trasera.

Pregunta 1

En el taller hay el siguiente material:

- 2 cajas de tornillos con 80 unidades en cada una
- 6 bolsas de escuadras con 10 unidades en cada una
- 33 trozos cuadrados de madera
- 13 trozos cortados a medida

¿Hay que comprar más material para que los 7 grupos formados puedan construir todos su pajarera?

Pregunta 2

Los trozos cuadrados cuestan 3 € cada uno; los hechos a medida, 7 € cada uno; las escuadras, 6 € la bolsa, y los tornillos, 5 € la caja. ¿Cuánto cuestan todas las pajareras?

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

¡Resuelvo el reto!

¿Organizamos una competición de juegos de ingenio?



Planificación

Vuestra tarea consiste en ayudar a organizar una competición entre tres grupos, A, B y C, de 2.º ESO, de 24, 32 y 28 estudiantes, respectivamente.

Las reglas de la competición son las siguientes:

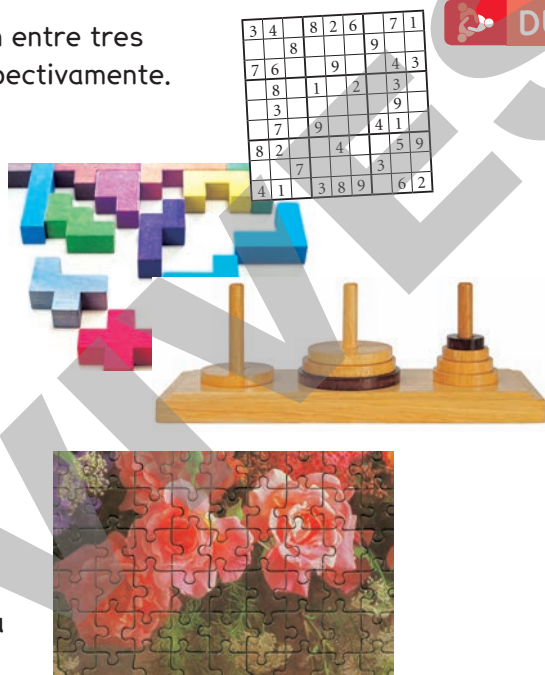
- Consta de cinco pruebas (tangram, puzzle, sudoku, pentominó y torres de Hanói) en las que debe participar un equipo de estudiantes de cada grupo.
- Todos los estudiantes deben pertenecer a un único equipo y participar como mínimo en una prueba.
- La puntuación de cada prueba, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 , se obtiene con la siguiente fórmula:

$$P_i = 480 - 2 \cdot t_i$$

donde t_i es el menor número primo mayor o igual que el tiempo empleado, expresado en segundos.

- La puntuación total conseguida por cada grupo al final de la competición se obtiene con esta fórmula:

$$P = 5 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 7 \cdot P_4 + 2 \cdot P_5$$



DUA

Desarrollo

Resolved por parejas las actividades siguientes:

97. Todos los equipos deben tener el mismo número de estudiantes y no se pueden mezclar estudiantes de dos grupos en un mismo equipo. Calcula el número máximo de alumnos por equipo y el número de equipos en cada grupo.
98. El equipo del grupo B que ha participado en la primera prueba ha tardado 83 s en finalizarla. Calcula el valor de la puntuación obtenida.
99. El equipo del grupo C que ha participado en la primera prueba ha empleado 65 s. ¿Cuál es el valor de t_1 que debemos utilizar para calcular la puntuación de la prueba? ¿Qué puntuación ha obtenido?
100. ¿Cuál es el menor valor de t para que la puntuación de una prueba sea negativa? Recuerda que este tiempo tiene que ser un número primo.

101. En esta tabla se muestran los tiempos, en segundos, empleados por los equipos en completar las pruebas:

	1	2	3	4	5
A	134	89	89	212	76
B	83	69	214	324	98
C	65	66	316	127	55

¿Cuántos puntos ha conseguido cada grupo en cada una de las pruebas? ¿Qué grupo ha ganado?

Revisión

102. Trabajo colaborativo

Formad 3 grupos de trabajo para organizar esta competición. Debéis diseñar las pruebas (buscad en Internet información sobre los juegos), redactar sus reglas y elaborar un cartel, presentación o vídeo para anunciar dicha competición.

DUA
DUA

Evalúo mi aprendizaje

Autoevaluación

103. Para cada cuestión, anota en el cuaderno la opción que creas correcta. Repasa aquellos contenidos sobre los que tengas dudas.

	Respuesta A	Respuesta B	Respuesta C
1. 192 es divisible por...	3, 5 y 13.	2, 3 y 6.	2, 3 y 5.
2. Si $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 3 \cdot 5$, entonces...	n es múltiplo de m.	m es divisor de n.	m es múltiplo de n.
3. Los números 15 y 32 son...	primos y primos entre sí.	compuestos y primos entre sí.	14 es primo y 32 es compuesto.
4. La descomposición en factores primos de 420 es:	$2^2 \cdot 3 \cdot 35$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$2^2 \cdot 7 \cdot 11$
5. El m.c.d. y el m.c.m. de 360 y 495 son:	m.c.d. $\rightarrow 3^2 \cdot 5$ m.c.m. $\rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	m.c.d. $\rightarrow 3^2 \cdot 5$ m.c.m. $\rightarrow 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	m.c.d. $\rightarrow 3^2 \cdot 5$ m.c.m. $\rightarrow 3^3 \cdot 5$
6. Los números $-7, 0$ y $- -6 $ ordenados son:	$-7, - -6 , 0$	$- -6 , -7, 0$	$-7, 0, - -6 $
7. Los números 5 y -5 son...	inversos.	opuestos.	inversos y opuestos.
8. $-18 : [(-12 + 9) \cdot 2 - (15 : 5 - 3 \cdot 3) - 6] =$	3	-3	1

Puedes comprobar las soluciones en **edubook**

DIARIO DE APRENDIZAJE **Valoro lo aprendido**

104. Copia la siguiente rúbrica en el cuaderno y señala el nivel que crees que tienes:

Soy capaz de...	Muy bien	Bien	Con dificultades	Con muchas dificultades
Identificar los números naturales.	●	●	●	●
Hallar los divisores y múltiplos de un número.	●	●	●	●
Descomponer un número en factores primos.	●	●	●	●
Hallar el m.c.d. y el m.c.m.	●	●	●	●
Reconocer números enteros, representarlos y ordenarlos.	●	●	●	●
Efectuar operaciones con números enteros.	●	●	●	●
Resolver problemas con números naturales y números enteros.	●	●	●	●
Colaborar activamente en la realización de tareas en grupo.	●	●	●	●
Aplicar lo que he aprendido para abordar situaciones cotidianas.	●	●	●	●

VICENS VIVES

Este libro está impreso en papel ecológico reciclable y con tintas exentas de elementos pesados solubles contaminantes. Directiva Europea 88/378/UE, norma revisada EN/71.

La editorial ha hecho todos los esfuerzos posibles para asegurar que las direcciones web son las correctas en el momento de la impresión de este libro y no será responsable de cualquier variación o imprecisión en las páginas web citadas en el presente Libro. Los Titulares del © y la Editorial no serán responsables del contenido de ningún sitio web mencionado en este libro.

Primera edición, 2024

1 2 3 4

© L. PANCORBO, G. RUIZ y M. FORERO. Sobre la parte literaria.

© EDITORIAL VICENS VIVES, S.A. Sobre la presente edición según el art. 8 del Real Decreto Legislativo 1/1996.

DL B 10.672-2024/ ISBN: 978-84-1193-376-6/ N.º de Orden V.V.: TM94.

Obra protegida por el RDL 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual y por la normativa vigente que lo modifica. Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio, incluidos los sistemas electrónicos de almacenaje, de reproducción, así como el tratamiento informático. Reservado a favor del Editor el derecho de préstamo público, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar.

IMPRESO EN ESPAÑA. PRINTED IN SPAIN.